РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 7 КЛАССА

***Задача 1.*** *Пять прямых, проведённых через одну точку, разбивают плоскость на 10 углов. Может ли случиться, что семь из этих углов равны 30 каждый, а оставшиеся три — 50 каждый?*

***Ответ.*** Не может. ***Решение*.** 10 углов, на которые разбивают плоскость пять прямых, проходящих через одну точку, делятся на пять пар вертикальных углов. Так как вертикальные углы равны, углов по 30 (а равно и по 50) должно быть чётное количество, а их количество по условию нечётно.

• За ответ без обоснования — *0 баллов*. Предъявление любого количества частных случаев и/или «объяснений», сводящихся к тому, что «как ни пробуй, никак не получается», обоснованием не является.

***Задача 2*.** *Выберите шесть различных чисел так, чтобы каждое выбранное число равнялось сумме каких-то двух других выбранных.*

***Решение*.** Годятся, например, числа 3, 2, 1, –1, –2, –3: 3 = 1+2, 2 = 3–1, 1 = 3–2, –1 = 2–3, –2 = 1–3, –3 = –1–2.

♦ На самом деле подходящих шестёрок чисел бесконечно много: подходит любая шестёрка вида *a*, *b*, *a*+*b*, –*a*, –*b*, –(*a*+*b*), где *a* и *b* — различные положительные числа. Можно показать, что других таких шестёрок нет. Решение задачи 4 для 8 класса показывает, что заменить в условии нашей задачи шесть чисел на меньшее их количество нельзя.

• За верный пример без проверки его правильности — *6 баллов*.

***Задача 3.*** *Одну из двух одинаковых ванн начали наполнять на 3 минуты раньше, чем вторую, но во вторую ванну за минуту наливалось вдвое больше воды, чем в первую. За минуту до того, как вторая ванна наполнилась целиком, в ней было на 10 л меньше воды, чем в первой, а в тот момент, когда она наполнилась целиком, в ней было на 10 л больше воды, чем в первой. Найдите объём ванны.*

***Ответ***. 140 л. ***Решение*.** Из второй фразы условия видно, что за последнюю минуту во вторую ванну налилось на 20 л больше воды, чем в первую. Так как за минуту во вторую ванну наливается вдвое больше воды, чем в первую, в первую ванну за минуту наливается 20 л воды, а во вторую — 40 л. Значит, за три первые минуты в первую ванну налилось 60 л воды.

Пусть вторая ванна наполнилась за *x* минут. Так как вначале разность между объёмами воды в первой и второй ваннах составляла 60 л, а в конце — –10 л, то *x* = (60–(–10))/20 = 3,5 мин. Поэтому объём ванны составляет 3,5⋅40 = 140 л.

• За ответ без всякого обоснования — *0 баллов*. Ответ с проверкой, но без объяснения, как он получается — *2 балла*. За нахождение скоростей, с которыми наполняются ванны, без дальнейшего содержательного продвижения — *2 балла*.

***Задача 4.*** *В коробке находятся шарики нескольких цветов. Шариков каждого цвета на два меньше четверти общего количества шариков. Каково наибольшее возможное количество шариков в коробке?*

***Ответ***. 40. ***Первое решение*.** Выберем любые четыре цвета и удалим из коробки все шарики этих цветов. Из условия следует, что мы удалили на 8 шариков меньше, чем четыре четверти общего количества шариков, то есть в коробке осталось 8 шариков. Если все они одного цвета, то всего шариков 8⋅5 = 40, так как шариков всех цветов в коробке поровну. Если же они раскрашены больше чем в один цвет, то шариков каждого цвета в коробке не больше четырёх, значит, всего в коробке не больше, чем 8+4⋅4 = 24 шарика. ***Второе решение.*** Пусть всего в коробке *n* шариков, по *d* шариков каждого цвета. По условию *d* — делитель числа *n*. Так как *d = n*/4–2 < *n*/4, имеем *d*/*n* > 4, откуда *n*/*d* ≥ 5, то есть *d* ≤ *n*/5. Итак, *n*/4–2 ≤ *n*/5  *n*/20 ≤ 2  *n* ≤ 40. Пример, когда шариков ровно 40: по 8 шариков каждого из пяти цветов.

♦ См. также задачу 3 для 9 класса.

• Ответ без всякого обоснования — *0 баллов*. Пример раскраски 40 шариков без обоснования его максимальности — *3 балла*.

***Задача 5.*** *На витрине магазина лежат 9 золотых монет. Их веса равны 200 г, 201 г, …, 208 г соответственно. Рядом с каждой монетой лежала этикетка, указывающая вес монеты. Первого апреля шутник переложил этикетки. Продавец точно знает, какая монета сколько весит, а хозяин — нет. Как за два взвешивания на чашечных весах со стрелкой, показывающей разность весов на чашках (стрелка отклоняется на соответствующую величину в сторону более тяжёлой чашки), продавец сможет показать хозяину, как правильно положить этикетки?*

***Решение*.** Сначала положим на левую чашу весов три монеты с наибольшими весами: 206, 207, 208 г, а на правую — три монеты с наименьшими весами: 200, 201, 202 г. Весы покажут разность в 18 г, которая возможна *только* между этими тройками монет: между любыми другими двумя тройками она меньше. Тем самым все монеты разбиты на три группы: 200, 201, 202 г; 206, 207, 208 г; 203, 204, 205 г. (не лежавшие на весах), и мы знаем, где какая группа.

Вторым взвешиванием на левую чашу весов положим самые тяжёлые, а на правую — самые лёгкие монеты из каждой группы: 202, 205, 208 г и 200, 203, 206 г. Весы покажут разность в 6 г, которая опять-таки, если брать по одной монете из тройки, возможна только в этом случае. Тем самым мы определяем все шесть монет, лежащих на весах, а, стало быть, и три оставшихся.

• За любой верный алгоритм — *5 баллов*, обоснование правильности алгоритма — *из 2 баллов*.