§ 1.6. Метод знакотождественных множителей

Метод, о котором пойдёт речь в этом параграфе, позволяет решать многие из неравенств вида

$$a_1(x) \cdot a_2(x) \cdot \ldots \cdot a_n(x) \vee 0 \qquad (1)$$

или

$$\frac{a_1(x) \cdot a_2(x) \cdot \ldots \cdot a_n(x)}{a_{n+1}(x) \cdot a_{n+2}(x) \cdot \ldots \cdot a_{n+m}(x)} \vee 0 \qquad (2)$$

(здесь знаком «$\vee$» обозначен один из четырёх возможных знаков неравенств «$>$», «$<$», «$\geqslant$», «$\leqslant$»; n и m — натуральные числа).

Основан он на очевидном утверждении: при замене любого множителя в числовом неравенстве вида (1) или (2) числом того же знака, что и заменяемое, знак неравенства не меняется, т. е. такая замена приводит к верному неравенству. Ключевая идея метода — замена одного или нескольких множителей (алгебраических выражений) в левой части неравенства более простыми алгебраическими выражениями «того же знака», что, как понятно, даёт возможность упростить и решение самого неравенства. Словосочетание «того же знака» заключено в кавычки, поскольку, разумеется, нуждается в более формальном определении.

Определение 1. Два алгебраических выражения $a(x)$ и $b(x)$ называются *знакотождественными*, если они имеют соответственно одни и те же промежутки знакоположительности, знакоотрицательности и нули.

Тот факт, что алгебраические выражения $a(x)$ и $b(x)$ являются знакотождественными, будем обозначать так: $\operatorname{sign}(a(x)) = \operatorname{sign}(b(x))$ (от латинского signum — знак).

Если алгебраические выражения $a(x)$ и $b(x)$ знакотождественны, то справедливы следующие равносильные переходы:

$$a(x)c(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow b(x)c(x) \geqslant 0, \quad \frac{a(x)}{c(x)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{b(x)}{c(x)} \geqslant 0, \quad \frac{c(x)}{a(x)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{c(x)}{b(x)} \geqslant 0$$

и аналогичные им для неравенств противоположного знака и строгих неравенств. В самом деле, если число x_0 является, например, решением неравенства $a(x)c(x) \geqslant 0$, это означает, что $a(x_0)c(x_0) \geqslant 0$. Но в силу знакотождественности алгебраических выражений $a(x)$ и $b(x)$ числа $a(x_0)$ и $b(x_0)$ либо одного знака, либо оба равны нулю. Поэтому и $b(x_0)c(x_0) \geqslant 0$, т. е. x_0 — решение неравенства $b(x)c(x) \geqslant 0$. Столь же просто показать, что справедливо и обратное утверждение, а значит, неравенства $a(x)c(x) \geqslant 0$ и $b(x)c(x) \geqslant 0$ равносильны. Доказательство равносильности двух других неравенств совершенно аналогично.

Итак, любое алгебраическое выражение в левой части неравенства вида (1) или (2) можно заменить любым другим знакотождественным выражением. Заметим, что такая замена возможна только для неравенств указанного вида; если, например, правая часть неравенства отлична от нуля, то делать такую замену уже нельзя, поскольку полученное неравенство не будет равносильно данному. Ясно и то, что при решении неравенств указанного вида менять алгебраическое выражение на знакотождественное целесообразно только в том случае, если знакотождественное выражение имеет более простой вид. Найти пары знакотождественных выражений $a(x)$ и $b(x)$ можно, основываясь на свойствах числовых неравенств. Приведём такие пары в таблице 4 (n и m — натуральные числа, l и c — действительные числа, $u(x)$ и $v(x)$ — произвольные алгебраические выражения).

Таблица 4

1	$a(x)=(u(x))^{2n+1} \pm (v(x))^{2n+1}$	$b(x)=u(x) \pm v(x)$
2	$a(x)=(u(x))^{2n} - (v(x))^{2n}$	$b(x)=(u(x))^2 - (v(x))^2$
3	$a(x)=\lvert u(x)\rvert - \lvert v(x)\rvert$	$b(x)=(u(x))^2 - (v(x))^2$
4	$a(x)=\sqrt[2n+1]{u(x)} \pm \sqrt[2n+1]{v(x)}$	$b(x)=u(x) \pm v(x)$
5	$a(x)=\sqrt[2n]{u(x)} - \sqrt[2n]{v(x)}$	$b(x)=u(x)-v(x)$ (при условиях $u(x) \geqslant 0$ и $v(x) \geqslant 0$)
6	$a(x)=l^{u(x)} - l^{v(x)}$ при $l>1$	$b(x)=u(x)-v(x)$
7	$a(x)=l^{u(x)} - l^{v(x)}$ при $0<l<1$	$b(x)=v(x)-u(x)$
8	$a(x)=\log_c u(x) - \log_c v(x)$ при $c>1$	$b(x)=u(x)-v(x)$ (при условиях $u(x)>0$, $v(x)>0$)
9	$a(x)=\log_c u(x) - \log_c v(x)$ при $0<c<1$	$b(x)=v(x)-u(x)$ (при условиях $u(x)>0$, $v(x)>0$)
10	$a(x)=\log_c u(x)$ при $c>1$	$b(x)=u(x)-1$ (при условии $u(x)>0$)
11	$a(x)=\log_c u(x)$ при $0<c<1$	$b(x)=1-u(x)$ (при условии $u(x)>0$)
12	$a(x)=\log_{c(x)} u(x)$	$b(x)=\dfrac{u(x)-1}{c(x)-1}$ (при условиях $u(x)>0$, $c(x)>0$)

Обоснование знакотождественности этих пар не представляет труда. В самом деле, докажем, например, знакотождественность разности модулей двух выражений и разности квадратов этих выражений. Если $a(x)=|u(x)|-|v(x)|$, то $a(x)>0$ тогда и только тогда, когда

$$|u(x)|-|v(x)|>0 \Leftrightarrow |u(x)|>|v(x)| \Leftrightarrow u^2(x)>v^2(x) \Leftrightarrow u^2(x)-v^2(x)>0,$$

т. е. $b(x)>0$. Отсюда следует совпадение промежутков знакоположительности выражений $a(x)$ и $b(x)$. Совпадение промежутков знакоотрицательности и совпадение нулей обосновывается аналогично.

Заметим, что в общем случае если $u(x) \geqslant 0$ и $v(x) \geqslant 0$, то
$$\operatorname{sign}(u(x) - v(x)) = \operatorname{sign}((u(x))^2 - (v(x))^2)$$
(т. е. разность двух неотрицательных при любом значении переменной алгебраических выражений и разность их квадратов знакотождественны).

Остальные утверждения о знакотождественных парах можно доказать аналогично, используя свойства соответствующих функций. То, что разность одинаковых нечётных степеней (либо разность двух корней одной и той же нечётной степени) двух алгебраических выражений знакотождественна разности этих выражений, достаточно очевидно. Поясним, почему соответствующее утверждение верно и для сумм указанных выражений, на примере корней. Действительно, зная, что разность корней одной нечётной степени можно заменить разностью подкоренных выражений, можно преобразовать сумму корней одной нечётной степени так:
$$a(x) = \sqrt[2n+1]{u(x)} + \sqrt[2n+1]{v(x)} = \sqrt[2n+1]{u(x)} - \sqrt[2n+1]{-v(x)},$$
откуда и следует, что
$$\operatorname{sign}\left(\sqrt[2n+1]{u(x)} + \sqrt[2n+1]{v(x)}\right) = \operatorname{sign}(u(x) - (-v(x))) = \operatorname{sign}(u(x) + v(x)).$$
Точно так же достаточно понимать, что разность двух логарифмов по основанию, большему 1, можно заменить разностью выражений под знаками логарифмов, добавив условия положительности этих выражений. Тогда 10-я и 12-я строки таблицы будут простыми следствиями такой замены. В самом деле, $\log_c u(x) = \log_c u(x) - \log_c 1$, и, следовательно, $\operatorname{sign}(\log_c u(x)) = \operatorname{sign}(u(x) - 1)$ при условиях $c > 1$, $u(x) > 0$. Кроме того, если одним из множителей в неравенствах вида (1) или (2) является логарифм с переменным основанием, то и его можно заменить знакотождественным множителем (последняя строка таблицы). Для такой замены нужно сначала использовать формулу перехода к новому основанию, выбрав в качестве последнего любое действительное число $m > 1$. Выполним тождественные преобразования:
$$\log_{c(x)} u(x) = \frac{\log_m u(x)}{\log_m c(x)} = \frac{\log_m u(x) - \log_m 1}{\log_m c(x) - \log_m 1}.$$
Отсюда и следует, что
$$\operatorname{sign}(\log_{c(x)} u(x)) = \operatorname{sign}\left(\frac{u(x) - 1}{c(x) - 1}\right)$$
при условиях $c(x) > 0$, $u(x) > 0$. Заметим, что условие $c(x) \neq 1$ будет учтено как бы «автоматически»: ведь неравенства (1) и (2) после замены множителей знакотождественными решаются обычно методом

интервалов, и при наличии множителя $\frac{u(x)-1}{c(x)-1}$ значения переменной, при которых $c(x)=1$, должны быть «выколоты». Для показательных и логарифмических выражений с основанием, меньшим 1 (строки 7, 9, 11), знакотождественные выражения можно, вообще говоря, не запоминать, а перейдя к основаниям, бо́льшим 1, использовать строки 6, 8, 10.

Таким образом, для успешного решения неравенств методом знакотождественных множителей достаточно помнить о четырёх основных парах таких множителей:

1) разность модулей двух выражений (и вообще, разность двух выражений, неотрицательных при всех допустимых значениях переменной) и разность квадратов этих выражений;

2) разность двух корней одной степени и разность подкоренных выражений (при условии неотрицательности последних в случае корней чётной степени);

3) разность двух показательных выражений с одним и тем же числовым основанием, бо́льшим 1, и разность показателей;

4) разность двух логарифмов с одним и тем же числовым основанием, бо́льшим 1, и разность выражений под знаками логарифмов (при условии положительности этих выражений).

Прежде чем переходить к примерам, сформулируем ещё одно утверждение, из которого легко вывести знакотождественность большинства приведённых в таблице пар.

Утверждение 1. *Если функция $y=a(t)$ монотонно возрастает на всей области определения, то для любых t_1 и t_2, принадлежащих этой области,* $\operatorname{sign}(a(t_1)-a(t_2))=\operatorname{sign}(t_1-t_2)$.

Доказательство легко следует из определения монотонно возрастающей функции. Действительно, если, например, $t_1-t_2>0$, то $t_1>t_2$ и $a(t_1)>a(t_2)$ (в силу возрастания функции $y=a(t)$), а значит, $a(t_1)-a(t_2)>0$. Обратно, если $a(t_1)-a(t_2)>0$, то $a(t_1)>a(t_2)$. Но тогда $t_1>t_2$ и $t_1-t_2>0$ (если допустить, что $t_1\leqslant t_2$, то в силу возрастания функции $y=a(t)$ получим, что и $a(t_1)\leqslant a(t_2)$, т. е. $a(t_1)-a(t_2)\leqslant 0$, что невозможно). Таким образом, промежутки знакоположительности выражений $a(t_1)-a(t_2)$ и t_1-t_2 одни и те же. Для промежутков знакоотрицательности и нулей доказательство аналогично.

В сущности, доказанное утверждение означает, что выражения $a(t_1)-a(t_2)$ и t_1-t_2 знакотождественны в области определения возрастающей функции $y=a(t)$. Поскольку функции $a(t)=t^{2n+1}$, $a(t)=\sqrt[n]{t}$, $a(t)=l^t$ (при $l>1$), $a(t)=\log_c t$ (при $c>1$) монотонно возрастают каждая в своей области определения, это позволяет для каждой из них при решении неравенств (1) и (2) менять любое выражение вида $a(t_1) - a(t_2)$ на знакотождественное выражение $t_1 - t_2$, добавляя при необходимости соответствующие ограничения (условия принадлежности t_1 и t_2 области определения функции $y = a(t)$). При этом t_1 и t_2 могут быть любыми алгебраическими выражениями с переменной x.

Ясно, что для монотонно убывающей функции будет справедливо аналогичное утверждение: если функция $y = a(t)$ монотонно убывает на всей области определения, то для любых t_1 и t_2, принадлежащих этой области, $\operatorname{sign}(a(t_1) - a(t_2)) = \operatorname{sign}(t_2 - t_1)$.

Для решения некоторых неравенств оказывается полезным следующее утверждение, являющееся следствием предыдущего.

Утверждение 2. *Если функция $y = f(x)$ монотонно возрастает на всей области определения и $f(x_0) = 0$, то $\operatorname{sign}(f(x)) = \operatorname{sign}(x - x_0)$; если функция $y = f(x)$ монотонно убывает на всей области определения и $f(x_0) = 0$, то $\operatorname{sign}(f(x)) = \operatorname{sign}(x_0 - x)$.*

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решите неравенство

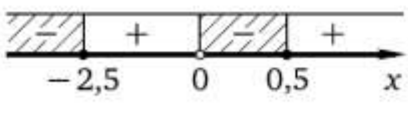
$$\frac{4^{x^2+3x-2} - (0{,}5)^{2x^2+2x-1}}{5^x - 1} \leqslant 0.$$

Решение. Перейдём в числителе дроби к основанию 2, а в знаменателе — к основанию 5, после чего применим метод знакотождественных множителей:

$$\frac{2^{2x^2+6x-4} - 2^{-2x^2-2x+1}}{5^x - 5^0} \leqslant 0 \iff \frac{2x^2+6x-4-(-2x^2-2x+1)}{x-0} \leqslant 0 \iff$$

$$\iff \frac{4x^2+8x-5}{x} \leqslant 0 \iff \frac{(x+2{,}5)(x-0{,}5)}{x} \leqslant 0.$$

Последнее неравенство легко решается методом интервалов:



Ответ: $(-\infty; -2{,}5] \cup (0; 0{,}5]$.

Пример 2. Решите неравенство

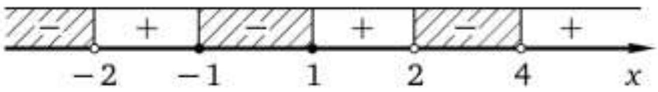
$$\frac{|3x-2| - |2x-3|}{|x^2+x-8| - |x^2-x|} \leqslant 0.$$

Р е ш е н и е. Заменим разности модулей разностями квадратов. Получим равносильное неравенство

$$\frac{(3x-2)^2-(2x-3)^2}{(x^2+x-8)^2-(x^2-x)^2} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(3x-2-2x+3)(3x-2+2x-3)}{(x^2+x-8-x^2+x)(x^2+x-8+x^2-x)} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(5x-5)}{(2x-8)(2x^2-8)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-1)}{(x-4)(x-2)(x+2)} \leqslant 0.$$

Последнее неравенство легко решается методом интервалов:



Ответ: $(-\infty; -2) \cup [-1; 1] \cup (2; 4)$.

Пример 3. Решите неравенство

$$\frac{|2x^2-11x+10|-x^2}{|6x^2-11x+4|-1} \leqslant 0.$$

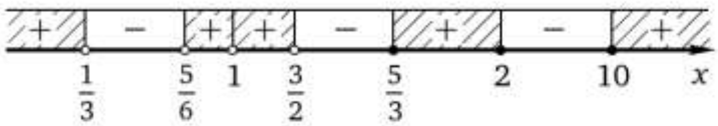
Р е ш е н и е. Поскольку $x^2 = |x^2|$; $1 = |1|$, справедливы следующие равносильные преобразования:

$$\frac{|2x^2-11x+10|-x^2}{|6x^2-11x+4|-1} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{|2x^2-11x+10|-|x^2|}{|6x^2-11x+4|-|1|} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x^2-11x+10)^2-(x^2)^2}{(6x^2-11x+4)^2-1^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-10)(x-2)\left(x-\frac{5}{3}\right)}{\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-1)\left(x-\frac{5}{6}\right)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-10)(x-2)\left(x-\frac{5}{3}\right)}{\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{6}\right)} \geqslant 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Последнюю систему решаем методом интервалов:



Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{6}; 1\right) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right) \cup \left[\frac{5}{3}; 2\right] \cup [10; \infty)$.

Пример 4. Решите неравенство

$$\frac{||x^2-x|-1|-1}{||4x+3|-2|-1} \geqslant 0.$$

Р е ш е н и е. В силу метода знакотождественных множителей

$$\frac{|a|-|b|}{|c|-|d|} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{a^2-b^2}{c^2-d^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(a-b)(a+b)}{(c-d)(c+d)} \geqslant 0.$$

Поэтому можно сразу перейти к неравенству

$$\frac{(|x^2-x|-2)\cdot|x^2-x|}{(|4x+3|-3)(|4x+3|-1)} \geqslant 0.$$

Вновь воспользовавшись тем же преобразованием, получим неравенство

$$\frac{(x^2-x-2)(x^2-x+2)\cdot|x^2-x|}{4x(4x+6)(4x+2)(4x+4)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)\cdot|x^2-x|}{x(x+1{,}5)(x+0{,}5)(x+1)} \geqslant 0.$$

Последнее неравенство решим методом интервалов:

Ответ: $(-\infty; -1{,}5) \cup (-0{,}5; 0) \cup \{1\} \cup [2; \infty)$.

Пример 5. Решите неравенство

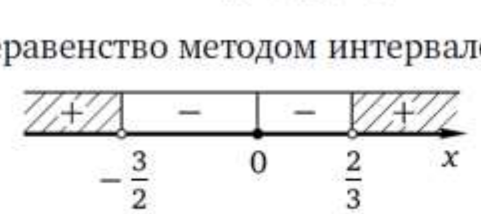
$$\frac{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt[3]{3x^2+4x-2}+\sqrt[3]{3x^2+x-4}} \geqslant 0.$$

Р е ш е н и е. Заметим, что числитель и знаменатель дроби определены при любых действительных значениях переменной (для числителя это следует из отрицательности дискриминантов каждого из квадратных трёхчленов и положительности коэффициента при второй степени переменной). Перепишем неравенство, представив знаменатель дроби в виде разности корней, после чего воспользуемся методом знакотождественных множителей:

$$\frac{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt[3]{3x^2+4x-2}-\sqrt[3]{-3x^2-x+4}} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2+x+1-x^2-x-1}{3x^2+4x-2-(-3x^2-x+4)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{6x^2+5x-6} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)} \geqslant 0.$$

Решим последнее неравенство методом интервалов:



Ответ: $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \{0\} \cup \left(\frac{2}{3}; \infty\right)$.

Пример 6. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{3x-2}}-\sqrt{x+\sqrt{2x-3}}}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}}<0.$$

Решение. Для решения этого неравенства воспользуемся тем, что

$$x-2\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1}-1)^2\geqslant 0,\quad x+3-4\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1}-2)^2\geqslant 0.$$

Применим метод знакотождественных множителей, заменив несколько раз разность корней разностью подкоренных выражений:

$$\frac{x+\sqrt{3x-2}-x-\sqrt{2x-3}}{x-2\sqrt{x-1}-x-3+4\sqrt{x-1}}<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-3}}{2\sqrt{x-1}-3}<0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-3}}{\sqrt{4x-4}-\sqrt{9}}<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3x-2-2x+3}{4x-4-9}<0,\\ x\geqslant\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x+1}{4x-13}<0,\\ x\geqslant\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{3}{2}\leqslant x<\frac{13}{4}.$$

Ответ: $\left[\frac{3}{2};\frac{13}{4}\right)$.

При решении следующего примера применим тождества $|a|=\sqrt{a^2}$, $a=\sqrt[3]{a^3}$ и $|a|^2=a^2$.

Пример 7. Решите неравенство

$$\frac{|x+1|-\sqrt{5-2x-2x^2}}{\sqrt[3]{x^3+2x^2-5x+2}-x}\leqslant 0.$$

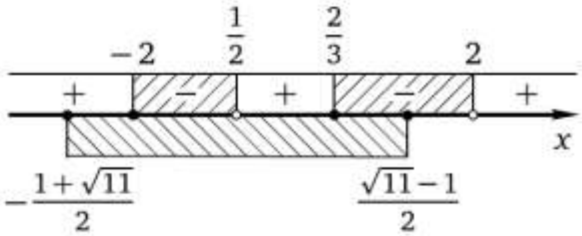
Решение. Справедлива следующая цепочка равносильных преобразований:

$$\frac{|x+1|-\sqrt{5-2x-2x^2}}{\sqrt[3]{x^3+2x^2-5x+2}-x}\leqslant 0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{5-2x-2x^2}}{\sqrt[3]{x^3+2x^2-5x+2}-\sqrt[3]{x^3}}\leqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2+2x+1-5+2x+2x^2}{x^3+2x^2-5x+2-x^3}\leqslant 0,\\ 2x^2+2x-5\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3x^2+4x-4}{2x^2-5x+2}\leqslant 0,\\ 2x^2+2x-5\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(x+2)\left(x-\frac{2}{3}\right)}{(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)}\leqslant 0,\\ -\dfrac{1+\sqrt{11}}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\sqrt{11}-1}{2}.\end{cases}$$

Решив последнюю систему методом интервалов, получим ответ.



Ответ: $\left[-2; \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{2}{3}; \frac{\sqrt{11}-1}{2}\right]$.

Пример 8. Решите неравенство

$$\frac{\log_2(3x+2)}{\log_3(2x+3)} \leqslant 0.$$

Решение. Традиционный способ решения подобных неравенств состоит в рассмотрении двух случаев. Применим метод знакотождественных множителей, предварительно представив числитель и знаменатель дроби в виде разностей логарифмов:

$$\frac{\log_2(3x+2)-\log_2 1}{\log_3(2x+3)-\log_3 1} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x+2-1}{2x+3-1} \leqslant 0, \\ x > -\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x+1}{2x+2} \leqslant 0, \\ x > -\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x+1}{x+1} \leqslant 0, \\ x > -\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < x \leqslant -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right]$.

Пример 9. Решите неравенство

$$\frac{\log_{0,2}\frac{1}{2x-1}+\log_5(2-x)}{\log_5(2x-1)+\log_{0,2}\frac{1}{3-2x}} \geqslant 0.$$

Решение. Приведём логарифмы к основанию 5, сложим их и воспользуемся тем же приёмом, что и при решении предыдущего примера:

$$\frac{\log_5(2x-1)+\log_5(2-x)}{\log_5(2x-1)+\log_5(3-2x)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}5 < x < 1{,}5, \\ \dfrac{\log_5(-2x^2+5x-2)}{\log_5(-4x^2+8x-3)} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}5 < x < 1{,}5, \\ \dfrac{\log_5(-2x^2+5x-2)-\log_5 1}{\log_5(-4x^2+8x-3)-\log_5 1} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}5 < x < 1{,}5, \\ \dfrac{-2x^2+5x-2-1}{-4x^2+8x-3-1} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}5 < x < 1{,}5, \\ \dfrac{-2x^2+5x-3}{-4x^2+8x-4} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}5 < x < 1{,}5, \\ \dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-2x+1} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}5 < x < 1{,}5, \\ \dfrac{(x-1)(x-1{,}5)}{(x-1)^2} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}5 < x < 1{,}5, \\ \dfrac{x-1{,}5}{x-1} \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0{,}5 < x < 1.$$

Ответ: $(0{,}5; 1)$.

Теперь рассмотрим пример, в котором приходится «заменить» сразу три разности.

Пример 10. Решите неравенство

$$\frac{(\log_2(2x+1)-\log_2(x+2))(|x|-|x-2|)}{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-1}} \leqslant 0.$$

Р е ш е н и е. Данное неравенство равносильно следующему:

$$\begin{cases} \dfrac{((2x+1)-(x+2))(x^2-(x-2)^2)}{(3x-2)-(2x-1)} \leqslant 0, \\ x \geqslant \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-1)\cdot 4(x-1)}{x-1} \leqslant 0, \\ x \geqslant \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{x-1} \leqslant 0, \\ x \geqslant \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leqslant x < 1.$$

Ответ: $\left[\frac{2}{3}; 1\right)$.

В ряду стандартных неравенств особое место занимают логарифмические неравенства, содержащие переменную в основании логарифма, поскольку решение таких неравенств вызывает определённые трудности у школьников и абитуриентов. Наиболее распространённый способ решения этих неравенств заключается в рассмотрении двух случаев: 1) основание больше единицы; 2) основание положительно и меньше единицы. Другим методом решения является метод интервалов (см. § 1.2), заключающийся в приведении неравенства к виду $f(x) \vee 0$ (где символом «$\vee$» обозначен один из знаков $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$), разбиении области определения $D(f)$ нулями функции $f(x)$ на несколько интервалов и определении знака функции $f(x)$ на каждом интервале по её знаку в одной из точек соответствующего интервала. Третий метод — метод знакотождественных множителей.

Рассмотрим вначале неравенство вида $\log_{h(x)} f(x) < b$. Воспользуемся формулой перехода к новому основанию, свойствами логарифмов и методом знакотождественных множителей:

$$\log_{h(x)} f(x) < b \Leftrightarrow \frac{\log_2 f(x)}{\log_2 h(x)} - b < 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2 f(x) - b\log_2 h(x)}{\log_2 h(x)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2 f(x) - \log_2 h^b(x)}{\log_2 h(x) - \log_2 1} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x) - h^b(x)}{h(x) - 1} < 0, \\ f(x) > 0, \\ h(x) > 0. \end{cases}$$

Важнейшими частными случаями являются неравенства вида $\log_{h(x)} f(x) < b$ при $b \in \{0; 1; 2\}$:

$$1)\ \log_{h(x)} f(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x) - 1}{h(x) - 1} < 0, \\ f(x) > 0, \\ h(x) > 0; \end{cases}$$

$$2)\ \log_{h(x)} f(x) < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x) - h(x)}{h(x) - 1} < 0, \\ f(x) > 0, \\ h(x) > 0; \end{cases}$$

$$3)\ \log_{h(x)} f(x) < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x) - (h(x))^2}{h(x) - 1} < 0, \\ f(x) > 0, \\ h(x) > 0. \end{cases}$$

Конечно же, запоминать эти системы не надо. Следует помнить лишь об основной идее решения подобных неравенств, заключающейся в переходе к основанию, большему 1, и замене разности логарифмов разностью алгебраических выражений под знаками логарифмов при естественных ограничениях на каждое из них.

Пример 11. Решите неравенство $\log_{2x-5}(5x-2) \geqslant 1$.

Р е ш е н и е. Перейдём к произвольному основанию, большему 1 (например, к основанию 2), и применим метод знакотождественных множителей:

$$\log_{2x-5}(5x-2) \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{\log_2(5x-2)}{\log_2(2x-5)} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(5x-2)-\log_2(2x-5)}{\log_2(2x-5)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2(5x-2)-\log_2(2x-5)}{\log_2(2x-5)-\log_2 1} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(5x-2)-(2x-5)}{(2x-5)-1} \geqslant 0, \\ 5x-2>0, \\ 2x-5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x+3}{2x-6} \geqslant 0, \\ x>2{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-3} \geqslant 0, \\ x>2{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow x>3.$$

Ответ: $(3; +\infty)$.

Для экономии места при решении всех следующих примеров некоторые очевидные преобразования будут опускаться.

Пример 12. Решите неравенство

$$\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2) \leqslant 2.$$

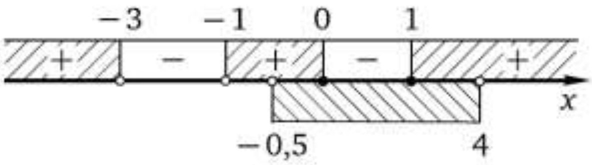
Р е ш е н и е. Применим теперь уже стандартные для решения неравенств такого типа преобразования:

$$\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2) \leqslant 2 \Leftrightarrow \frac{\log_2(4+7x-2x^2)}{\log_2|x+2|} - 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(4+7x-2x^2)-\log_2|x+2|^2}{\log_2|x+2|-\log_2 1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(4+7x-2x^2)-(x+2)^2}{|x+2|-1} \leqslant 0, \\ 4+7x-2x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-3x^2+3x}{(x+2)^2-1^2} \leqslant 0, \\ 2x^2-7x-4<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x(x-1)}{(x+1)(x+3)} \geqslant 0, \\ -0{,}5<x<4. \end{cases}$$

Последняя система легко решается методом интервалов:



Ответ: $(-0{,}5; 0] \cup [1; 4)$.

При решении неравенства были использованы тождество $|a|^2 = a^2$ и замена алгебраического выражения $|u(x)|-|v(x)|$ знакотождественным выражением $u^2(x)-v^2(x)$. В дальнейшем будем опускать переход от «одиночного» логарифма к разности этого логарифма и логарифма числа 1 по тому же основанию, сразу меняя соответствующий множитель на знакотождественный (т. е. на разность алгебраического выражения под знаком логарифма и 1 при условии положительности этого алгебраического выражения).

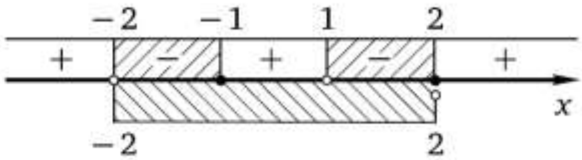
Пример 13. Решите неравенство

$$\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\leqslant 0.$$

Р е ш е н и е. Применим метод знакотождественных множителей, перейдя к произвольному основанию, большему 1. Для более компактной записи будем здесь и далее использовать переход к основанию 10:

$$\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\leqslant 0\Leftrightarrow\frac{\lg(x+2)}{\lg(2-x)}\cdot\frac{\lg(3-x)}{\lg(x+3)}\leqslant 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(x+1)(2-x)}{(1-x)(x+2)}\leqslant 0,\\ -2<x<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}\leqslant 0,\\ -2<x<2.\end{cases}$$

Последняя система легко решается методом интервалов:



Ответ: $(-2;-1]\cup(1;2)$.

Для решения неравенств вида $\log_{h(x)}f(x)<\log_{h(x)}g(x)$ будем использовать обычные преобразования:

$$\log_{h(x)}f(x)<\log_{h(x)}g(x)\Leftrightarrow\frac{\lg f(x)}{\lg h(x)}-\frac{\lg g(x)}{\lg h(x)}<0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{\lg f(x)-\lg g(x)}{\lg h(x)}<0\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{f(x)-g(x)}{h(x)-1}<0,\\ f(x)>0,\\ g(x)>0,\\ h(x)>0.\end{cases}$$

Эти преобразования, разумеется, остаются в силе как для неравенств противоположного знака, так и для нестрогих неравенств.

Пример 14. Решите неравенство

$$\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(2x^2+x-1)\geqslant\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(11x-6-3x^2).$$

Р е ш е н и е. Имеем

$$\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(2x^2+x-1) \geqslant \log_{\frac{3x-1}{x+2}}(11x-6-3x^2) \Leftrightarrow \frac{\lg(2x^2+x-1)}{\lg\frac{3x-1}{x+2}} - $$

$$- \frac{\lg(11x-6-3x^2)}{\lg\frac{3x-1}{x+2}} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{\lg(2x^2+x-1)-\lg(11x-6-3x^2)}{\lg\frac{3x-1}{x+2}} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(2x^2+x-1)-(11x-6-3x^2)}{\frac{3x-1}{x+2}-1} \geqslant 0, \\ 2x^2+x-1>0, \\ 11x-6-3x^2>0, \\ \dfrac{3x-1}{x+2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2(x+2)}{2x-3} \geqslant 0, \\ \dfrac{2}{3}<x<3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ 1{,}5<x<3. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{1\}\cup(1{,}5;3)$.

Последняя группа стандартных логарифмических неравенств, содержащих неизвестную в основании логарифма, — неравенства, левая и правая части которых представляют собой логарифмы с разными основаниями от одного и того же алгебраического выражения. Равносильная система и в этом случае получается с помощью преобразований, аналогичных рассмотренным ранее:

$$\log_{f(x)}h(x) < \log_{g(x)}h(x) \Leftrightarrow \frac{\lg h(x)}{\lg f(x)} - \frac{\lg h(x)}{\lg g(x)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg h(x)\cdot\left(\frac{1}{\lg f(x)}-\frac{1}{\lg g(x)}\right)<0 \Leftrightarrow \lg h(x)\cdot\frac{\lg g(x)-\lg f(x)}{\lg f(x)\cdot\lg g(x)}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(h(x)-1)(g(x)-f(x))}{(f(x)-1)(g(x)-1)}<0, \\ f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ h(x)>0. \end{cases}$$

Разумеется, эти преобразования применимы и в случае неравенства противоположного знака, и в случае нестрогих неравенств. Последнее особенно важно, поскольку случай равенства $h(x)$ единице будет учтён в соответствующей системе, что позволит избежать потери решения, которая часто происходит при традиционном решении путём перехода к основанию $h(x)$.

Пример 15. Решите неравенство

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x) \geqslant \log_{2x^2-5x+3}(3-x).$$

Р е ш е н и е. Имеем

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x) \geqslant \log_{2x^2-5x+3}(3-x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\lg(3-x)}{\lg(12x^2-41x+35)} - \frac{\lg(3-x)}{\lg(2x^2-5x+3)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\lg(3-x)\cdot(\lg(2x^2-5x+3)-\lg(12x^2-41x+35))}{\lg(12x^2-41x+35)\cdot\lg(2x^2-5x+3)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(2-x)(-10x^2+36x-32)}{(12x^2-41x+34)(2x^2-5x+2)} \geqslant 0, \\ 3-x>0, \\ 12x^2-41x+35>0, \\ 2x^2-5x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-2)^2\left(x-\frac{8}{5}\right)}{\left(x-\frac{17}{12}\right)(x-2)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)} \geqslant 0, \\ x<3, \\ \left(x-\dfrac{5}{3}\right)\left(x-\dfrac{7}{4}\right)>0, \\ (x-1)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)>0. \end{cases}$$

Решение первого неравенства последней системы — объединение промежутков $\left(\frac{1}{2}; \frac{17}{12}\right) \cup \left[\frac{8}{5}; 2\right) \cup (2; \infty)$. Пересечением решений трёх оставшихся неравенств является множество $(-\infty; 1) \cup \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{4}; 3\right)$. Следовательно, решение всей системы: $\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left[\frac{8}{5}; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{4}; 2\right) \cup (2; 3)$.

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left[\frac{8}{5}; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{4}; 2\right) \cup (2; 3)$.

Очевидно, что в ряде случаев метод знакотождественных множителей позволяет решать логарифмические неравенства с переменным основанием быстрее и эффективнее по сравнению с другими методами, предоставляя возможность сэкономить время и силы на экзамене для решения других заданий.