**Карточка 3 "Игровые стратегии"**

**Задача 1.** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один или три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16, 18 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 27. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 27 или больше камней.

В начальный момент в куче было *S* камней, 1 ≤ *S* ≤ 26.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит, описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника.

а) Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение *S*, когда такая ситуация возможна

б) Найдите два таких значения *S*, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

— Петя не может выиграть за один ход;

— Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня. Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания без разделительных знаков.

в) Найдите минимальное значение *S*, при котором одновременно выполняются два условия:

— у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

— у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

**Задача 2**. Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один или два камня или увеличить количество камней в куче в три раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16, 17 или 45 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 74. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 74 или больше камней. В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 73.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит, описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника.

 а) Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение *S*, когда такая ситуация возможна.

б) Найдите три таких значения *S*, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

— Петя не может выиграть за один ход;

— Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня. Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания без разделительных знаков.

в) Найдите минимальное значение *S*, при котором одновременно выполняются два условия:

— у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

— у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

**Задача 3**. Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень** или **увеличить количество камней в куче в два раза**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 259. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т. е. первым получивший позицию, в которой в кучах будет 259 или больше камней.

В начальный момент в первой куче было 17 камней, во второй куче — *S* камней; 1 ≤ *S* ≤ 241.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. В описание выигрышной стратегии не следует включать ходы играющего по этой стратегии игрока, не являющиеся для него безусловно выигрышными, т. е. не являющиеся выигрышными независимо от игры противника.

а) Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите **минимальное значение***S*, когда такая ситуация возможна

б) Найдите два таких значения *S*, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

— Петя не может выиграть за один ход;

— Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня. Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания без разделительных знаков.

в) Найдите минимальное значение *S*, при котором одновременно выполняются два условия:

— у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

— у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

**Задача 4.** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат **две кучи камней**. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в одну из куч один камень**, увеличить **количество камней в первой куче в два раза** или **увеличить количество камней во второй куче в три раза**. Например, пусть в одной куче 6 камней, а в другой 9 камней; такую позицию мы будем обозначать (6, 9). За один ход из позиции (6, 9) можно получить любую из четырёх позиций: (7, 9), (12, 9), (6, 10), (6, 27). Чтобы делать

ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 84. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший позицию, в которой в кучах будет 84 или больше камней.

В начальный момент в первой куче было 16 камней, во второй куче — *S* камней, 1 ≤ *S* ≤ 67.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока — значит, описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. В описание выигрышной стратегии не следует включать ходы играющего по ней игрока, которые не являются для него безусловно выигрышными, т.е не гарантирующие выигрыш независимо от игры противника.

а) Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение *S*, когда такая ситуация возможна.

б) Найдите два таких значения *S*, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

— Петя не может выиграть за один ход;

— Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня. Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания без разделительных знаков.

в) Найдите минимальное значение *S*, при котором одновременно выполняются два условия:

— у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

— у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

**Задача 5\*.** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в любую кучу один камень или увеличить количество камней в любой куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда сумма количества камней в кучах становится не менее 30. В начальный момент в первой куче было K камней, а во второй – S камней, 1 ≤ K ≤ 29, 1 ≤ S ≤ 29.

а) Сколько существует пар (S; K), таких что Ваня выигрывает первым ходом при любой игре Пети?

б) При K=6, найдите минимальное и максимальное значение S, при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

− Петя не может выиграть за один ход;

− Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня. Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

в) Сколько существует пар (S;K), при котором одновременно выполняются два условия:

– у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

– у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

**Задача 6\*.** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может:   а) добавить в кучу один камень;  б) увеличить количество камней в куче в два раза;  в) увеличить количество камней в куче в три раза.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 43. Если при этом в куче оказалось не более 72 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 42. Ответьте на следующие вопросы:

  **Вопрос 1.** Найдите минимальное значение S, при котором Ваня выигрывает своим первым ходом при любой игре Пети.

  **Вопрос 2.** Сколько существует значений S, при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

− Петя не может выиграть за один ход;

− Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

  **Вопрос 3.** Найдите минимальное и максимальное значения S, при которых одновременно выполняются два условия:

– у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

– у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом. Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.