Справочник

Благоприятствующее событию A элементарное событие — это *элементарное событие* в *случайном эксперименте*, при наступлении которого наступает событие A. Можно также сказать, что событие A состоит из благоприятствующих ему элементарных событий.

Пример. Событию «выпала хотя бы одна решка» при двукратном бросании монеты благоприятствуют элементарные события

$$\{\text{РО}, \text{ОР}, \text{РР}\}.$$

Элементарное событие ОО событию «хотя бы одна решка» не благоприятствует.

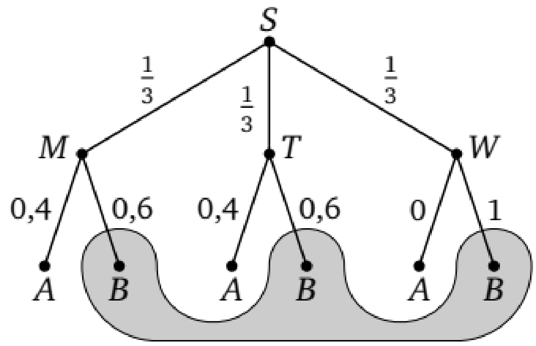
Вероятность случайного события — числовая мера правдоподобности события, наступающего в ходе *случайного эксперимента*. Вероятность — число от 0 до 1. Вероятность случайного события A равна сумме вероятностей элементарных событий, благоприятствующих событию A.

Элементарным событиям эксперимента вероятности назначают исходя из того, как эксперимент устроен. Иногда считают, что все элементарные события имеют одинаковые вероятности (равновозможны) в силу симметрии. Например, при бросании правильной игральной кости никакая грань не имеет преимуществ перед другой. Поэтому всем шести элементарным событиям этого эксперимента назначают вероятность $\frac{1}{6}$. Во многих жизненных экспериментах вероятности элементарным событиям назначают приближённо с помощью длительных наблюдений частот этих событий.

Дерево случайного эксперимента (дерево вероятностей). Многие эксперименты, где возникает несколько взаимосвязанных событий, удобно представить в виде ветвящегося процесса. Изображать это лучше всего с помощью графа — дерева, растущего из вершины S (начало). От этой вершины направляются рёбра к возможным событиям, дальше — к другим событиям и т. д. Около каждого ребра можно подписать условную вероятность соответствующего события.

Поясним на примере, как строится дерево эксперимента и как с помощью деревьев решаются задачи.

Пример. Учёный приехал в Гамбург на конференцию. Доклады проводятся в двух корпусах университета А и В в течение трёх дней с понедельника по среду. Доклад нашего учёного с равными вероятностями может быть назначен на любой из трёх дней; 40 % всех докладов в понедельник и 40 % всех докладов во вторник проводятся в корпусе А. В среду все доклады проходят в корпусе В, поскольку в А готовится церемония закрытия конференции. Найдите вероятность того, что доклад нашего учёного назначен в корпусе В.



Пример решения. Построение дерева видно из рисунка. Мы не рисуем стрелки, считая, что все рёбра направлены вниз. Удобно обозначать одной и той же буквой разные вершины, если они означают одно и то же событие.

Элементарными событиями в этом эксперименте являются цепочки рёбер, ведущие от начальной вершины S к конечным вершинам A и B. Например, элементарное событие SMA состоит в том, что доклад назначен на понедельник (M) и проходит в корпусе A.

Вероятности, надписанные около рёбер, — *условные*. Например, вероятность 0,4 у ребра TA — это вероятность того, что доклад будет в корпусе A, при условии, что он во вторник (T). Поэтому сумма вероятностей в каждой точке ветвления равна 1.

Событию B благоприятствуют три элементарных события — это цепочки SMB, STB и SWB. Вероятность каждой легко найти, пользуясь правилом умножения:

$$\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(SMB) + \mathrm{P}(STB) + \mathrm{P}(SWB) = \frac{1}{3}\cdot 0{,}6 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}6 + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{11}{15}.$$

Более сложные эксперименты требуют более сложных деревьев, но суть не меняется.

Дисперсия случайной величины — *математическое ожидание* квадрата отклонения этой случайной величины от её математического ожидания. Коротко говоря, дисперсия — это средний квадрат отклонения:

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2.$$

Часто для вычисления дисперсии применяется формула

$$\mathrm{D}X = \mathrm{E}X^2 - \mathrm{E}^2 X,$$

Для дисперсии верны следующие свойства:

1°) $\mathrm{D}(aX+b)=a^2\mathrm{D}X$ (a и b — произвольные числа);

2°) для *независимых случайных величин* $\mathrm{D}(X+Y)=\mathrm{D}X+\mathrm{D}Y$.

Не все случайные величины имеют дисперсию (например, не имеют дисперсии те величины, которые не имеют математического ожидания).

Закон больших чисел — теоремы, утверждающие разные виды *статистической устойчивости*. Наиболее простая и исторически первая из них — теорема Бернулли: с ростом числа одинаковых *испытаний* вероятность малого отличия между частотой *успеха* и его вероятностью стремится к единице. Проще, но не совсем строго можно сказать, что частота успеха статистически устойчива и стремится к вероятности этого события.

Испытание (испытание Бернулли) — *случайный эксперимент*, в котором может наступить один из двух элементарных исходов. Эти исходы условно называют *успехом* и *неудачей*. Пример испытания Бернулли — бросание одной монеты.

Очень многие эксперименты можно свести к последовательности независимых и одинаковых испытаний.

Математическое ожидание случайной величины. Если дискретная случайная величина X имеет *распределение*

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \end{pmatrix},$$

то математическое ожидание $\mathrm{E}X$ вычисляется по формуле

$$\mathrm{E}X = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots + x_np_n.$$

Аналогичная сумма, но бесконечная, получается, если количество значений случайной величины бесконечно:

$$\mathrm{E}X = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots + x_np_n + \ldots$$

Бывают случайные величины, у которых математическое ожидание не существует (придумайте пример).

Если случайные величины X и Y имеют математические ожидания, то верны следующие свойства математических ожиданий:

1°) $\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}X+b$ (a и b — произвольные числа), в частности, $\mathrm{E}b=b$;

2°) $\mathrm{E}(X+Y)=\mathrm{E}X+\mathrm{E}Y$;

3°) если случайные величины *независимы*, то $\mathrm{E}(XY)=\mathrm{E}X\cdot EY$.

Независимые случайные величины. Проводится эксперимент, в котором наблюдаются две случайные величины X и Y. Если никакое значение одной из величин не влияет на вероятности значений другой, то такие величины называют независимыми.

Независимые события. События A и B независимы, если наступление одного из них не влияет на вероятность другого. Для независимых событий *правило умножения вероятностей* принимает вид

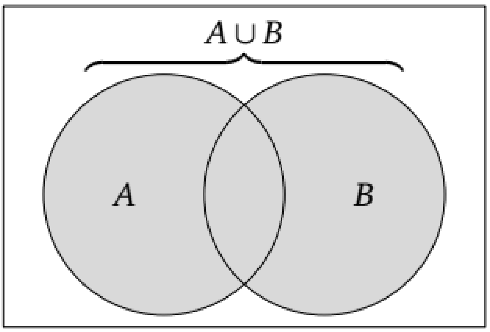
$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B).$$

Иногда это равенство принимают за определение двух независимых событий.

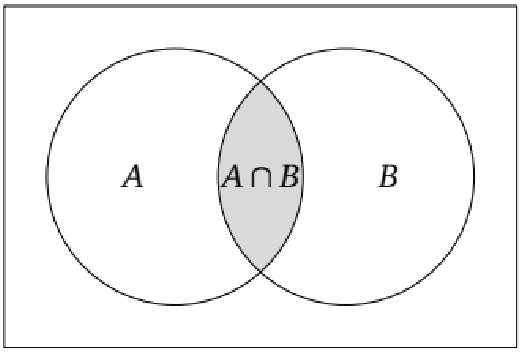
Несовместные события — события, пересечение которых пусто. Несовместные события не имеют общих элементарных исходов. Если события несовместны, то вероятность их объединения равна сумме их вероятностей (*формула сложения* для несовместных событий):

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B).$$

Объединением событий A и B называется событие $A \cup B$, которое происходит, когда наступило хотя бы одно из событий A и B. Иными словами, объединению событий A и B благоприятствуют элементарные события, которые благоприятствуют хотя бы одному из этих событий: или A, или B, или обоим. Удобно показать объединение двух событий на диаграмме Эйлера.



Пересечением событий A и B называется событие, которое происходит, когда наступают оба эти события. Иными словами, пересечению $A \cap B$ благоприятствуют элементарные события, которые благоприятствуют обоим событиям A и B. На диаграмме Эйлера пересечение изображается общей частью фигур, соответствующих событиям A и B.



Правило умножения вероятностей. Предположим, что вероятность события A равна $\mathrm{P}(A)$. Вероятность события B при условии, что A наступило, обозначим $\mathrm{P}(B|A)$. Тогда вероятность пересечения событий равна

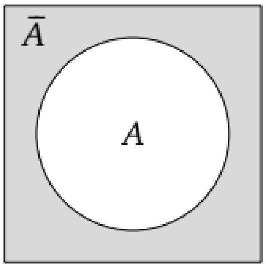
$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B|A) \cdot \mathrm{P}(A).$$

Точно так же

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A|B) \cdot \mathrm{P}(B).$$

Когда при решении задач мы умножаем вероятности вдоль цепочек в *дереве случайного эксперимента*, мы пользуемся этим правилом.

Противоположное событие. Пусть в эксперименте определено событие A. Если оно не случилось, то говорят, что случилось противоположное событие $\bar{A}$. Строго говоря, событию $\bar{A}$ благоприятствуют те и только те элементарные исходы эксперимента, которые не благоприятствуют событию A. Диаграмма для противоположного события изображена на рисунке.



Распределение вероятностей — соответствие между значениями *случайной величины* и вероятностями этих значений. Распределение может быть задано таблицей, диаграммой или графиком, формулой, словесным описанием в зависимости от природы случайной величины. Если две случайные величины имеют одно и то же распределение, это не значит, что они совпадают. Например, при двукратном бросании кости число очков, выпавшее в первый раз, и число очков, выпавшее во второй раз, чаще всего не совпадают. Значит, это разные случайные величины, но они имеют одинаковое распределение.

Случайная величина — величина, значение которой определяется исходом случайного эксперимента. Дискретная случайная величина — та, у которой значения являются отдельными точками на числовой прямой.

Пример дискретной случайной величины — «число очков, выпавшее на игральной кости». Эта величина имеет шесть натуральных значений. Другой пример — число попыток до достижения первого успеха. Здесь значения — все натуральные числа.

Значения непрерывной величины образуют числовые промежутки. Например, температура в комнате может иметь любое значение из некоторого интервала и изменяется плавно.

Случайный выбор — выбор без предпочтений. Если есть какой-то набор (совокупность) предметов, то при случайном выборе каждый предмет (пара, тройка предметов и т. п.) может быть выбран с равными шансами.

Случайный эксперимент (случайный опыт) — условия, в которых наблюдаются случайные события. Задать случайный эксперимент — значит описать условия, в которых мы наблюдаем *элементарные события*, описать сами элементарные события и назначить их вероятности. Например, эксперимент «двукратное бросание монеты» предполагает четыре равновозможных элементарных события ОО, ОР, РО и РР. Иногда случайный эксперимент проводят люди. Многие случайные эксперименты создаёт природа.

Стандартное отклонение случайной величины — арифметический квадратный корень из *дисперсии* случайной величины $\sqrt{\mathrm{D}X}$.

Треугольник Паскаля. Таблица с *числами сочетаний* C_n^k.

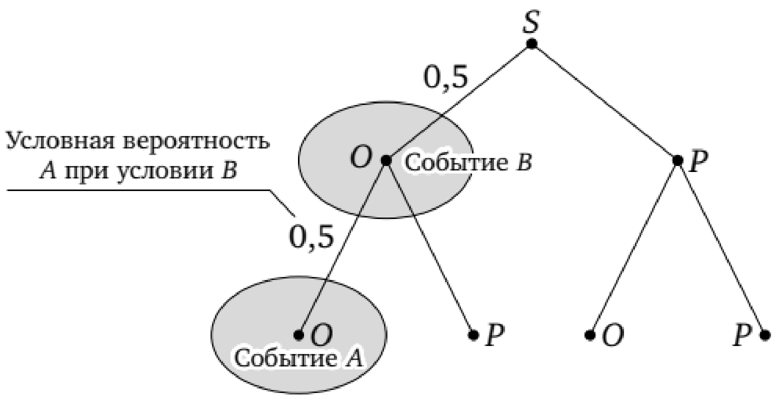
n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Треугольник Паскаля до $n = 10$

Столбцы и строки треугольника нумеруются начиная с нуля. Например, $C_6^4 = 15$ — это число в шестой строке в четвёртом столбце. Два соседних числа в одной строке в сумме дают число следующей строки: $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

Условная вероятность события *A* при условии *B* — это вероятность события A в предположении, что событие B наступило.

Пример. При двукратном бросании монеты событие $A = \{$два раза выпал орёл$\}$ имеет вероятность 0,25. Но если при первом броске орёл уже случился (событие B), то теперь событие A имеет вероятность (условную) 0,5, поскольку нужно, чтобы выпал ещё только один орёл. Таким образом, наступление события B повлияло на вероятность события A, увеличив её с 0,25 до 0,5. На рисунке показано дерево этого эксперимента. Условные вероятности удобно подписывать около рёбер дерева.



Успех и неудача — два взаимоисключающих *элементарных события* в одном *испытании*.

Формула Бернулли — формула, по которой вычисляется вероятность ровно k успехов в серии из n одинаковых и независимых *испытаний Бернулли*:

$$C_n^k p^k q^{n-k},$$

где p — вероятность успеха в каждом отдельном испытании, а $q = 1 - p$ — вероятность неудачи.

Формула сложения вероятностей выражает вероятность объединения событий через их вероятности и вероятность их пересечения:

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B).$$

Для *несовместных* событий формула принимает более простой вид:

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B).$$

Число сочетаний C_n^k — число способов выбрать k предметов из множества, в котором n предметов. Например, нужно выбрать две буквы из букв А, Б и В. Существует три варианта: АБ, АВ и БВ. Поэтому $C_3^2 = 3$.

Число сочетаний можно описать иначе — это число последовательностей длины n, в которой ровно k успехов и $n-k$ неудач. Например, существует ровно шесть последовательностей длины 4 из двух успехов и двух неудач:

УУНН, УНУН, УННУ, НУУН, НУНУ и ННУУ.

Поэтому $C_4^2 = 6$.

Формула числа сочетаний:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!},$$

где $n!$ — факториал числа n, т. е. произведение натуральных чисел от 1 до n. Факториал нуля определяется отдельно: $0! = 1$.

При не очень больших n число сочетаний удобно найти в специальной таблице: *треугольнике Паскаля*.