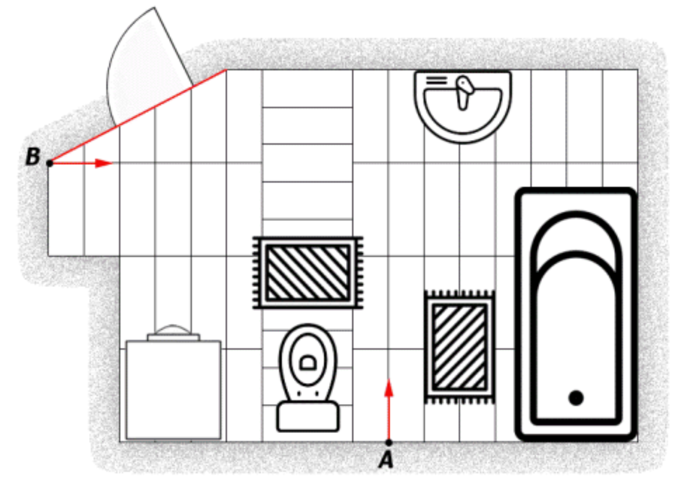
7 класс
Теоретический тур

Задача №1. В ванной

Ванная в квартире экспериментатора Глюка имеет сложную форму (смотрите рисунок).

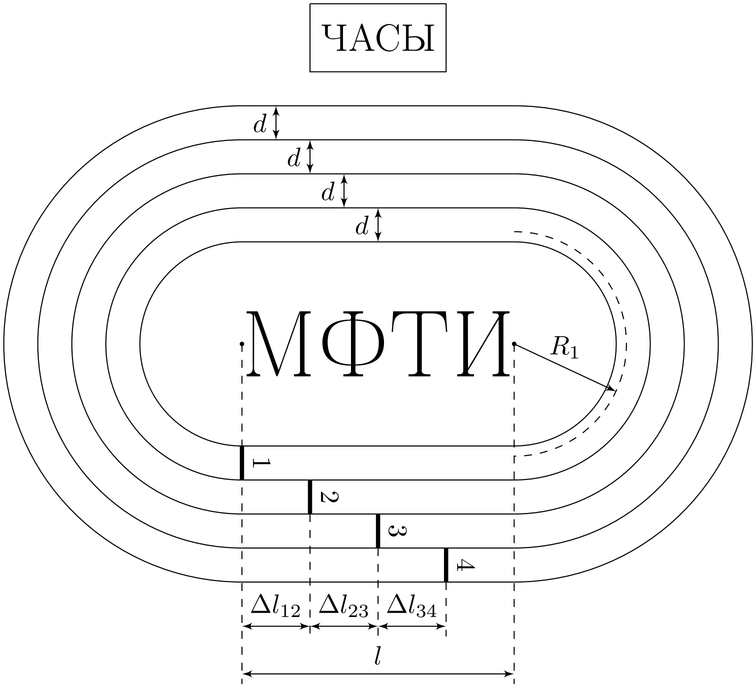


Пол ванной выложен керамической плиткой одного размера. Причём, при укладке плитки на пол, её пришлось резать только для того, чтобы уложить вдоль стены с дверным проёмом (верхний левый угол рисунка). Глюк проводит свои эксперименты везде. Ванная не является исключением. Однажды он запускал улиток из точек A и B в указанных на рисунке направлениях, пытаясь подобрать разность во времени старта так, чтобы улитки непременно встретились, не доползая до противоположной стены. В результате эксперимента Глюк выяснил, что улитку из B надо отправить в путь на $\Delta t = 200$ с раньше, чем улитку из A.

Найдите площадь ванной комнаты экспериментатора, если известно, что улитки всегда движутся прямолинейно с одинаковой скоростью $u = 12$ см/мин, плитки в ванной плотно прилегают краями друг к другу, а коврики одинаковые.

Задача №2. Стадион МФТИ

Беговые дорожки стадиона МФТИ — это 4 дорожки шириной $d = 1.22$ м каждая. Дорожки состоят из двух прямолинейных участков длины $l = 84.39$ м и двух участков в виде полуокружностей радиуса R. Радиус траектории атлета или эффективный радиус на первой дорожке $R_1 = 36.80$ м.



1. Найдите эффективную длину одного круга первой дорожки L_1.

2. Определите на каких расстояниях Δl_{12}, Δl_{23}, Δl_{34} должны располагаться линии стартов на различных дорожках на прямолинейных участках, чтобы длины дистанций в 3 круга совпадали при условии финиша на линии старта первой дорожки.

3. Какие значения может иметь средняя скорость атлета, пробежавшего 6 кругов по первой дорожке, если он определял время своего забега по стадионным часам (с точностью до минуты)? Стартовал атлет в 13:00, а финишировал в 13:13. Выразите максимальную и минимальную средние скорости и в км/ч, и в м/с.

Примечание: длина окружности радиуса R равна $2\pi R$, где $\pi = 3.1416$.

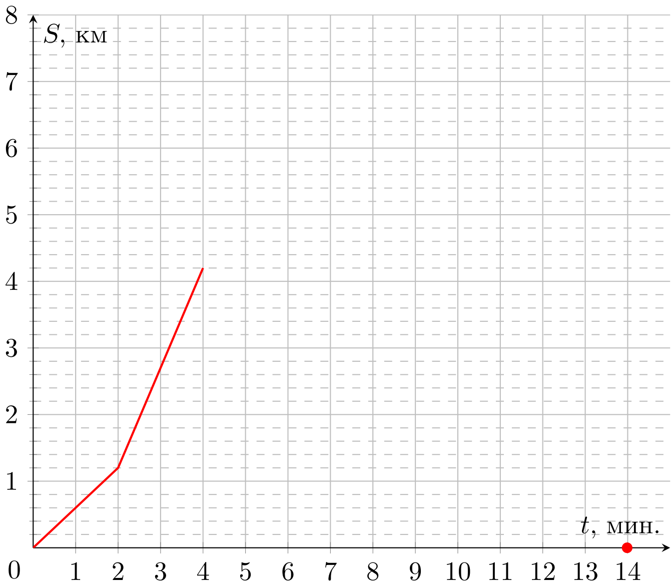
Задача №3. Шоколад и карамель

При производстве конфет в сосуд объёмом $V = 16.0$ л заливают горячий белый шоколад плотностью $\rho_1 = 1.20$ г/см^3. Когда сосуд заполняется на 60%, в него вместо шоколада сразу начинают заливать карамель плотностью $\rho_2 = 1.52$ г/см^3 со скоростью $\mu = 0.60$ л/мин. Автоматика настроена на определение средней плотности содержимого сосуда, и, когда средняя плотность превышает ρ_1 на 10%, подача карамели в сосуд прекращается. Изменением объёма жидкостей при их смешивании можно пренебречь.

Сколько минут происходила подача карамели?

Задача №4. Догонялки

Два автомобиля одновременно начинают движение из пункта A в пункт B по прямолинейной дороге. Известно, что первый автомобиль едет с постоянной скоростью v_1 не останавливаясь до пункта B. В пункте B он останавливается и ждёт прибытия второго автомобиля. Второй автомобиль движется с постоянной скоростью v_2, меньшей чем v_1. Через некоторое время он останавливается, и, когда первый автомобиль достигает пункта B, вновь продолжает движение с той же скоростью v_2.



На рисунке приведен график зависимости расстояния между автомобилями от времени вплоть до момента $t_1 = 4$ мин. В момент времени $t_2 = 14$ мин. автомобили встретились.

1. Определите скорости автомобилей v_1 и v_2.
2. В течение какого времени Δt второй автомобиль покоился?
3. Найдите расстояние L между пунктами A и B.

7 класс

Теоретический тур

Задача №7-Т1. В ванной

Пусть длинная сторона плитки имеет размер a, а короткая – b. Поскольку плитку резали только у стены с дверным проёмом, по рисунку можно найти соотношение между a и b. На 4 длинных стороны плитки приходится 10 коротких сторон (коврик перед унитазом может закрывать только одну целую плитку, поскольку его ширина равна $2b$). То есть

$$\frac{a}{b} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

Улитка из A до встречи должна пройти путь $3a$, улитка из B – путь $(a + 7b)$. Значит условие встречи можно записать в виде уравнения:

$$\frac{a + 7b}{u} - \frac{3a}{u} = \Delta t.$$

С учетом того, что $a = 2.5b$, получаем:

$$b = \frac{u\Delta t}{2} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{200}{60} \text{ см} = 20 \text{ см}. \quad a = 2.5b = 50 \text{ см}.$$

Теперь, зная размеры одной плитки, можно посчитать и площадь всей ванной комнаты, разбив её на простые части (например, на прямоугольники и прямоугольные треугольники с известными сторонами):

$$S = 4a(a + 9b) + 11ab + \frac{5}{2}ab = 4a^2 + 49.5ab = 5.95 \text{ м}^2.$$

PS: Разбиение на площади может быть и другим, соответственно формула может быть другой (например, $S = 59.5ab$). Но ответ, конечно, при этом измениться не должен.

Задача №7-Т2. Стадион МФТИ

Эффективная длина круга первой дорожка складывается из двух прямолинейных участков и двух дуг половинок окружностей.

$$L_1 = 2\pi R_1 + 2l \approx 400 \text{ м}.$$

Длины дорожек имеют различия только на криволинейных участках. Для первой и второй дорожек на трёх кругах разность длин:

$$\Delta l_{12} = 3(L_2 - L_1) = 3(2\pi(R_1 + d) - 2\pi R_1) = 6\pi d \approx 23 \text{ м}.$$

Легко заметить, что:

$$\Delta l_{12} = \Delta l_{23} = \Delta l_{34} = 6\pi d \approx 23 \text{ м}.$$

Для расчёта средней скорости на дистанции 2400 м нельзя точно определить время. Например, показание часов 13:00 может соответствовать любому моменту от 13:00:00 до 13:00:59:99... Тогда время забега атлета принадлежит интервалу от 12 до 14 минут. Эти границы позволяют найти наименьшее и наибольшее значения средней скорости.

$$v_{\min} = \frac{2400 \text{ м}}{14 \cdot 60 \text{ с}} \approx 2.86 \text{ м/с}, \quad v_{\min} = \frac{2.4 \text{ км} \cdot 60}{14 \text{ ч}} \approx 10.3 \text{ км/ч};$$

$$v_{\max} = \frac{2400 \text{ м}}{12 \cdot 60 \text{ с}} \approx 3.33 \text{ м/с}; \quad v_{\max} = \frac{2.4 \text{ км} \cdot 60}{12 \text{ ч}} \approx 12 \text{ км/ч}.$$

Задача №7-Т3. Шоколад и карамель

Запишем формулу средней плотности:

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2}.$$

Найдём массу шоколада $m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1 \cdot 0.6V_1$, объём карамели $V_2 = \mu_2 t$, массу карамели $m_2 = \rho_2 V_2 = \rho_2 \mu t$.

После подстановки получим:

$$1.1\rho_1 = \frac{0.6\rho_1 V + \rho_2 \mu t}{0.6V + \mu t}.$$

Выразим и найдём время

$$t = \frac{0.6V \cdot 0.1V}{\mu(\rho_2 - 1.1\rho_1)} = 9.6 \text{ мин}.$$

Проверим возможность ответа:

$$V_2 = \mu t = 0.60 \frac{\text{л}}{\text{мин}} \cdot 9.6 \text{ мин} = 5.76 \text{ л} < 6.4 \text{ л} = 0.4V.$$

Т.е. карамель не выливалась!

Задача №7-Т4. Догонялки

Введём обозначения: T_1 — всё время в пути первого автомобиля, T_2 — всё время в пути второго автомобиля, τ_2 — время движения второго автомобиля до остановки. Согласно условию задачи:

$$T_1 = \tau_2 + \Delta t;$$

$$T_2 = t_2 = 14 \text{ мин.}$$

Из графика (точка излома): $\tau_2 = 2$ мин. В течении этого времени расстояние между автомобилями меняется с относительной скоростью $(v_1 - v_2)$. За 2 минуты оно станет равным (из графика) $S_1 = 1.2$ км. Получаем первое уравнение связи скоростей:

$$S_1 = (v_1 - v_2)\tau_2.$$

После этого из графика видно, что за следующие 2 минуты первый автомобиль уехал от стоящего второго ещё на

$$S_2 = 4.2 \text{ км} - 3.2 \text{ км} = 3 \text{ км}.$$

Это нам позволяет найти скорость первого автомобиля:

$$v_1 = \frac{3 \text{ км}}{2 \text{ мин.}} = 1.5 \text{ км/мин.}$$

тогда из уравнения для связи скоростей можно найти скорость второго автомобиля:

$$v_2 = 1.5 \ \frac{\text{км}}{\text{мин.}} - \frac{1.2 \text{ км}}{2 \text{ мин.}} = 0.9 \text{ км/мин.}$$

Теперь запишем формулы для расчёта пути из A в B:

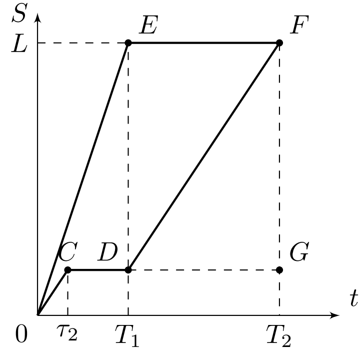
$$L = v_1 T_1 = v_1(\tau_2 + \Delta t);$$

$$L = v_2(T_2 - \Delta t).$$

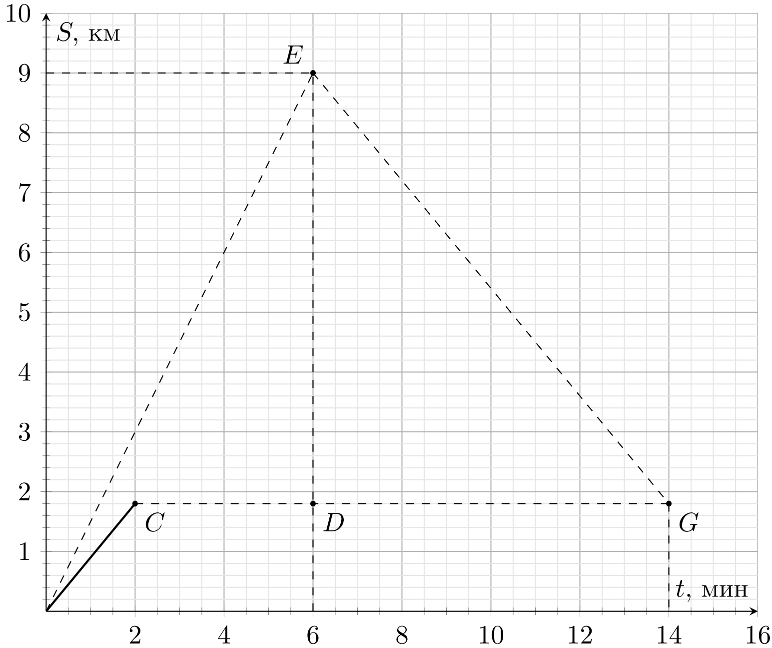
Приравняем правые части уравнений и найдём время остановки:

$$\Delta t = \frac{v_2 T_2 - v_1 T_1}{v_1 + v_2} = 4 \text{ мин.}$$

Также Δt можно найти графически. На рисунке качественно показан график движения автомобилей. Рассмотрим построение графика согласно условию задачи.



Известно, что первый автомобиль едет быстрее второго (угловой коэффициент прямой OE больше, чем у прямой OC) с постоянной скоростью v_1 вплоть до пункта B (точка E), а затем останавливается (участок EF). Второй автомобиль некоторое время движется с постоянной скоростью v_2 (участок OC), останавливается (участок CD), и когда первый автомобиль достигает пункта B, вновь продолжает движение (точка D) с той же скоростью v_2 (угловые коэффициенты прямых OC и DF совпадают). В момент времени $t_2 = 14$ мин. автомобили поравнялись (точка F). Зная скорости автомобилей и время движения второго до остановки, можно определить положение точки G и провести через неё прямую GE с угловым коэффициентом $-v_2$ до пересечения с графиком движения первого автомобиля. На рисунке ниже показано это построение. Время остановки второго автомобиля 4 мин легко найти из построения.



Теперь можно найти длину пути:

$$L = v_2(T_2 - \Delta t) = 9 \text{ км.}$$

Если решать с использованием графика, то из построения также легко найти расстояние между пунктами A и B — 9 км.

Шифр

$\sum$

7-Т1. В ванной

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1	Высказана идея воспользоваться для расчёта площади плитками, введены обозначения для длины и ширины плитки	1.0		
2	Определено соотношение a/b. Важно! Баллы по этому критерию даются ТОЛЬКО если для его вычисления бралось отношение числа коротких и длинных сторон плиток, приходящихся на ВСЮ ШИРИНУ комнаты (10/4), а не посчитанное на глазок в каком-то конкретном месте, например, по площади коврика. То есть, если в решении, например, сказано «по рисунку мы видим, что $a = 2{,}5b$», баллы по этому критерию не ставятся, и, в то же время, если сказано «по рисунку мы видим, что $4a = 10b$», то баллы ставить можно. Если за этот пункт участник получает 0 баллов, но отношение a/b найдено верно, то остальные пункты задачи оцениваются без штрафов.	3.0		
3	Путь улитки, стартовавшей из пункта A, выражен в размерах плитки.	1.0		
4	Путь улитки, стартовавшей из пункта B, выражен в размерах плитки.	1.0		
5	Верно записано уравнение для условия встречи улиток	2.0		
6	Найдена длина стороны плитки a	1.0		
7	Найдена длина стороны плитки b	1.0		
8	Высказана идея расчёта площади комнаты с помощью разбиения сложной фигуры на более простые, площадь которых легко считается (например, прямоугольники и прямоугольные треугольники).	1.0		
9	Написано уравнение для определения площади комнаты или верно найдено количество простых фигур, через которые определяется площадь комнаты.	1.0		
10	Верно найдена площадь ванной комнаты и указаны единицы измерения в ответе	3.0		

Шифр

$\sum$

7-Т2. Стадион МФТИ

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Записана верная формула для нахождения длины круга первой дорожки	1.0		
1.2	Найдена длина круга	1.0		
2.1	Есть понимание размера радиуса 2 дорожки R_2+d	1.0		
2.2	Найдена разность длин двух соседних дорожек	1.0		
2.3	Показано что значения разностей длин у всех трёх пар дорожек равны	2.0		
3.1	Есть формула средней скорости	1.0		
3.2	Верно определена длина пути на 6 кругах	1.0		
3.3	Верно определено наибольшее время забега	1.0		
3.4	Найдена минимально возможная средняя скорость	1.0		
3.5	Верно выполнен перевод между значениями минимальной скорости для разных единиц измерения	1.0		
3.6	Верно определено наименьшее время забега	1.0		
3.7	Найдена максимально возможная скорость	1.0		
3.8	Верно выполнен перевод между значениями максимальной скорости для разных единиц измерения	1.0		
3.9	Указано, что значение средней скорости любое из интервала	1.0		

Шифр

$\sum$

7-Т3. Шоколад и карамель

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1	Записана формула средней плотности	2.0		
2	Записана формула для массы шоколада через объём сосуда или найдена масса шоколада	2.0		
3	Записана формула для объёма карамели через массовый расход и время или найден объём карамели	2.0		
4	Записана формула для массы карамели через массовый расход и время или найдена масса карамели карамели	2.0		
5	Записана формула для расчёта времени (при решении по действиям формулы в работе может не быть, но при отсутствии ошибок в промежуточных вычислениях и верном ответе баллы за этот пункт ставятся)	3.0		
6	Найдено время в минутах. — Если ответ в секундах (576 с), то ставится 1 балл. — Если в ответе нет единиц измерения, то 0 баллов	2.0 *1.0* *0.0*		
7	Проведена проверка возможности ответа	2.0		

Шифр

$\sum$

7-Т4. Догонялки

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Указано, что излом графика произошёл в момент остановки второго автомобиля	1.0		
1.2	Указано, что коэффициент угла наклона графика на втором участке - скорость второго автомобиля	1.0		
1.3	Указано, что коэффициент угла наклона графика на первом участке - скорость $(v_1 - v_2)$	1.0		
1.4	Найден коэффициент угла наклона графика на первом участке	1.0		
1.5	Найден коэффициент угла наклона графика на втором участке	1.0		
1.6	Найдена скорость v_1 (ответ + единицы измерения)	1.0		
1.7	Найдена скорость v_2 (ответ + единицы измерения)	1.0		
2.1	**Метод 1.** Записано уравнение, связывающее время в пути первого автомобиля с его скоростью и L. В работе должно быть обозначено, какие моменты времени обозначают введенные неизвестные переменные.	1.0		
2.2	**Метод 1.** Записано уравнение, связывающее время в пути второго автомобиля с его скоростью и L. В работе должно быть обозначено, какие моменты времени обозначают введенные неизвестные переменные.	1.0		
2.3	**Метод 1.** Получено уравнение с одной неизвестной, для нахождения времени, например: $v_2(T_2 - \Delta t) = v_1(\tau_2 + \Delta t)$. ($\tau_2 = 2$ мин.; $T_2 = 14$ мин.)	2.0		
2.4	**Метод 1.** Найдено время остановки второго автомобиля	1.0		
2.5	**Метод 1.** Верно указаны единицы измерения для времени остановки второго автомобиля	1.0		
2.6°	**Метод 2.** Есть объяснение к графическому решению	1.0		
2.7°	**Метод 2.** Выполнено верное построение	2.0		

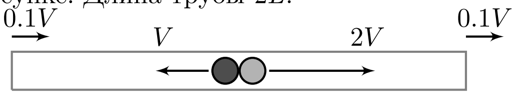
2.8°	**Метод 2.** Выбран хороший масштаб, обозначены и подписаны оси, указаны единицы изметения	1.0		
2.9°	**Метод 2.** Найдено время остановки второго автомобиля	2.0		
3.1	Ответ для L	1.0		
3.2	Верно указаны единицы измерения	1.0		

8 класс

Теоретический тур

Задача №1. По трубе

Два лёгких небольших упругих шарика движутся внутри закрытой с обоих концов гладкой массивной трубы, расположенной горизонтально. В тот момент времени, когда шарики находятся посередине трубы, их скорости относительно земли равны V и $2V$, а трубу начинают двигать с постоянной скоростью $0.1V$, как показано на рисунке. Длина трубы $2L$.



1. Через какой промежуток времени τ_1 левый шарик первый раз столкнется с торцевой стенкой трубы?

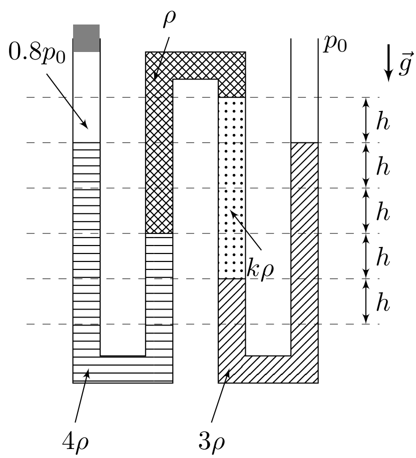
2. Через какой промежуток времени τ_2 правый шарик первый раз столкнется с торцевой стенкой трубы?

3. Через какой промежуток времени τ шарики в первый раз столкнутся друг с другом?

4. Найдите скорости u_1 левого и u_2 правого шариков относительно земли непосредственно перед их первым соударением.

Соударения шариков с торцевыми стенками трубы считайте абсолютно упругими. *Примечание*: в результате абсолютно упругого удара скорость шарика относительно стенки остаётся такой же по величине, как до удара, но направлена противоположно.

Задача №2. Изогнутая трубка



Изогнутая трубка постоянного сечения заполнена несмешивающимися жидкостями с разными плотностями, как показано на рисунке. В левом конце трубки, закрытом пробкой, заперт воздух под давлением $0.8p_0$, где p_0 — атмосферное давление, которое равно гидростатическому давлению столба жидкости плотностью ρ высотой $10h$. Правый конец трубки открыт в атмосферу, система находится в состоянии равновесия.

1. Определите коэффициент k у плотности жидкости (смотрите рисунок).

2. В каком направлении и на сколько сместится свободная поверхность жидкости в правом колене трубки в новом состоянии равновесия, если убрать пробку?

Задача №3. Туда-сюда

Экспериментатор Глюк провёл эксперимент. Десятилитровую кастрюлю, заполненную наполовину водой комнатной температуры ($t_0 = 20$ °C), Глюк поставили греться на электрической плитке. Через некоторое время в кастрюлю, не снимая её с плиты, он долил воду комнатной температуры неизвестного объёма. А, спустя ещё какое-то время, воду такого же объёма из кастрюли, также не снимая её с плиты, вылил. Затем он дважды измерил температуру воды в кастрюле — через $\tau_1 = 8$ минут и $\tau_2 = 9$ минут с момента начала нагрева, и получил значения $t_1 = 45$ °C и $t_2 = 50$ °C. Всего плитка работала 10 минут.

1. Какую температуру $t_к$ имела бы вода в кастрюле к концу эксперимента, если бы по ходу нагрева её масса не изменялась?

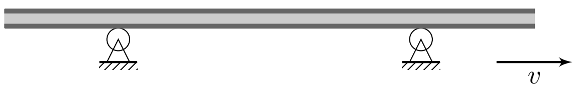
2. Определите наименьшее возможное значение массы $m_{\min}$ воды, доливаемой Глюком в ходе эксперимента.

3. Найдите самый ранний от начала нагрева момент времени $\tau_{\min}$, когда мог происходить забор воды из кастрюли.

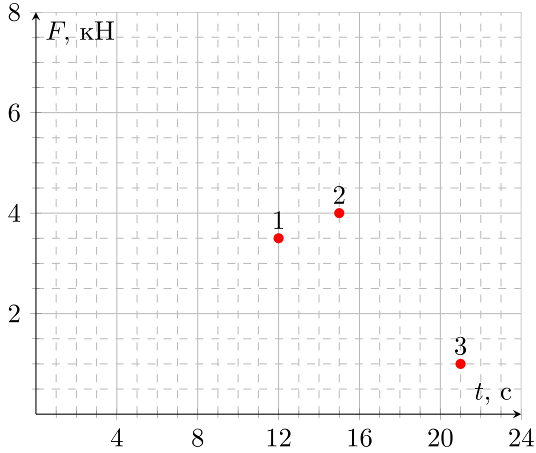
Тепловые потери и теплоёмкость кастрюли пренебрежимо малы. Считайте, что при изменении массы воды её температура изменяется мгновенно, а при добавлении воды она не выливается из кастрюли. Удельная теплоёмкость воды равна 4200 Дж/(кг · °C), плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3.

Задача №4. Ползущий рельс

На отдельно стоящих роликовых лёгких опорах, оси которых находятся на расстоянии $l = 9$ м, лежит однородный рельс постоянного сечения. Ролики начинают вращаться, в результате чего рельс движется горизонтально с некоторой постоянной скоростью, как показано на рисунке (масштаб не выдержан).



Под опорами находятся динамометры. Зависимости показаний F динамометров от времени t для каждой из опор сняли и решили построить их графики. Однако лаборант, который должен был это сделать, случайно пролил на таблицы с данными кофе и смог восстановить только три точки (они показаны на рисунке).



Помогите лаборанту восстановить графики.

1. Определите массу рельса m.
2. Найдите скорость рельса v.
3. Какую минимальную длину $L_{\min}$ мог иметь рельс?

8 класс

Теоретический тур

Задача №8-Т1. По трубе

Перейдём в систему отсчёта, связанную с трубой. Скорость левого шарика будет равна $1.1V$. С учётом этого находим $\tau_1 = \dfrac{L}{1.1V} = \dfrac{10L}{11V}$.

Скорость правого шарика в системе отсчёта, связанной с трубой $1.9V$. Откуда $\tau_2 = \dfrac{L}{1.9V} = \dfrac{10L}{19V}$.

После соударения с торцевыми стенками трубы скорости шариков останутся такими же по модулю. К моменту времени τ левый шарик пройдет путь $L + l_1 = 1.1V\tau$. Путь, пройденный вторым шариком, к этому моменту равен $L + l_2 = 1.9V\tau$, причём $l_1 + l_2 = 2L$.

Из записанных соотношений определим время $\tau = \dfrac{4L}{3V}$.

Вернёмся в неподвижную систему отсчёта. Скорость левого шарика в ней будет равна $1.1V + 0.1V = 1.2V$, скорость правого шарика будет равна $1.9V - 0.1V = 1.8V$.

Таким образом $u_1 = 1.2V$, $u_2 = 1.8V$.

Задача №8-Т2. Изогнутая трубка

Согласно условию: $p_0 = \rho g 10h = 10\rho g h$. Полное давление в жидкости: $p = p_{\text{внешнее}} + p_{\text{гидростатическое}}$. Пройдём по трубке от левой свободной поверхности к правой:

$$0.8p_0 + 4\rho g 2h – \rho g 3h + k\rho g 4h – 3\rho g 3h = p_0.$$

С учётом первого уравнения получаем $k = 1.5$.

Т.к. давление на левый свободный уровень увеличится, то он опустится. Значит правый свободный уровень поднимется на ту же величину. Если считать смещение равным s, то

$$p_0 + 4\rho g(2h – 2s) – \rho g(3h – 2s) + 1.5\rho g 4h – 3\rho g(3h + 2s) = p_0.$$

Отсюда $s = h/6$.

Задача №8-Т3. Туда-сюда

С учётом того, что теплопотерями и теплоёмкостью кастрюли можно пренебречь, мощность плитки можно определить как $N = cm\Delta t/\Delta\tau$, где c — удельная теплоёмкость воды, m — масса воды (объёмом 5 литров, $m = \rho V = 5$ кг), Δt — изменение температуры, $\Delta\tau$ — время, за которое это изменение произошло.

Так как в период с момента времени τ_1 до момента времени τ_2 масса воды в кастрюле равна m, температура изменилась с t_1 до t_2, то $N = \frac{cm(t_2-t_1)}{\tau_2-\tau_1} = 1.75$ кДж.

Если по ходу нагрева масса воды в кастрюле не меняется, то не меняется скорость нагрева $\Delta t/\Delta\tau = 5$ °C/мин. Значит конечная температура равна $t_к = t_0 + 10\tau_0\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = 70$ °C ($\tau_0 = 1$ мин).

Пусть масса добавляемой воды в процессе эксперимента Δm. К моменту времени $8\tau_0$ нагреватель выделит количество теплоты $N8\tau_0$. Оно равно сумме количества теплоты $cm(t_{45} - t_0)$, полученного водой массой m (оставшейся в сосуде после выливания) и количества теплоты $c\Delta m(t_x - t_0)$, полученного водой массой Δm. Т.е.

$$8N\tau_0 = cm(t_{45} - t_0) + c\Delta m(t_x - t_0),$$

где $t_{45} = 45$ °C, t_x — температура воды в момент её забора. Причём $t_x < t_{45}$.

С учётом этого и вышеприведенных уравнений получаем

$$\Delta m = \frac{m}{t_x - t_0}\left(8\tau_0\frac{t_2 - t_1}{\tau_2 - \tau_1} - t_{45} + t_0\right).$$

Из данного соотношения видно, что Δm принимает минимальное значение при максимально возможном значении $t_x = 45$°C. Откуда $m_{\min} = 3$ кг.

Пусть τ — время, когда происходил забор воды из кастрюли. Исходя из того, что объём кастрюли 10 л, максимальная масса добавляемой воды может быть равна $m = 5$ кг.

Тепло, выделившееся на нагревателе к моменту времени τ:

$$N\tau = cm(t_x - t_0) + c\Delta m(t_x - t_0).$$

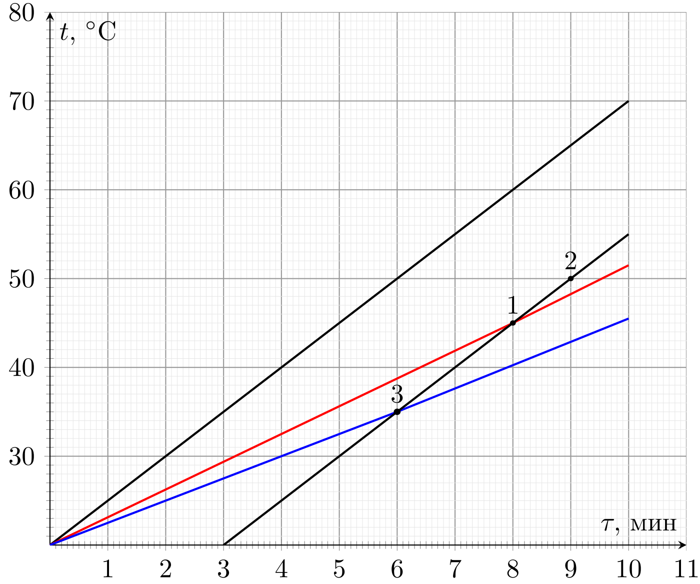
С учётом этого и соотношений для мощности плитки, выделяемой за время $8\tau_0$ получаем:

$$\tau = \frac{c(m + \Delta m)}{N}\frac{8N\tau_0 - cm(t_{45} - t_0)}{c\Delta m} = \left(\frac{m}{\Delta m} + 1\right)\cdot\frac{8\tau_0 - cm(t_{45} - t_0)}{N}.$$

Откуда видно, что $\tau = \tau_{\min} = 6$ мин. при $\Delta m = \Delta m_{\max} = m$.

Также можно решать эту решать задачу графически в системе координат «время-температура». График процесса нагрева в этих координатах будет состоять из трех отрезков прямых: первый — до долива (масса воды в кастрюле $m = 5$ кг), второй — после долива (масса воды в кастрюле $m + \Delta m$) и третий — после забора воды (масса воды в кастрюле m).

Возьмем известные нам точки 1 и 2 и проведем через них прямую. На этой прямой лежит отрезок графика, соответствующий третьему участку. Учитывая, что масса воды на третьем и первом участке одинакова, прямые, на которых



они лежат, должны быть параллельны, так как мощность нагрева постоянна. Проведем прямую, параллельную нашей и проходящую через начало координат (время — 0 мин, температура — 20 °C). Именно на этой прямой лежит график первого участка. По ней также можно определить температуру $t_к$, которую имела бы вода в кастрюле, если бы её масса не менялась со временем. Температура, соответствующая 10 минутам и есть искомая $t_к = 70$ °C.

По наклону этой прямой можно также определить мощность плитки $N = \frac{cm\Delta t}{\Delta\tau} = 1.75$ кВт.

Когда в кастрюлю доливают воду, масса в ней увеличивается, а температура уменьшается. Поскольку изменение температуры происходит мгновенно, график перескакивает на прямую, имеющую наклон, соответствующий новой массе, и проходящую через начало координат. Чем масса больше, тем более полого пойдет прямая. А её пересечение с прямой третьего участка даст момент забора воды.

Поскольку кастрюля десятилитровая, больше 5 литров долить в неё невозможно. Этому случаю соответствует нижняя (голубая) прямая. Именно она пересекается с прямой третьего участка раньше любой другой возможной (в точке 3, соответствующей $\tau_{\min} = 6$ минут).

В то же время, второй участок не может пересечься с третьим позже точки 1, которой соответствует минимальная добавочная масса $m_{\min} = 3$ кг.

Задача №8-Т4. Ползущий рельс

Для начала определимся с тем, как будут меняться во времени силы реакции опор (которые численно равны показаниям динамометров). Очевидно, что центр масс рельса на старте находится между опорами. Пусть x — это расстояние от левой опоры до центра масс в начальный момент времени, F_1 и F_2 — показания левого и правого динамометров соответственно. Тогда через время t получим:

$$F_1 l = Mg(l - x - vt);$$

$$F_2 l = Mg(x + vt).$$

Откуда:

$$F_1(t) = Mg - \frac{Mgx}{l} - \frac{Mgv}{l}t;$$

$$F_2(t) = \frac{Mgx}{l} + \frac{Mgv}{l}t.$$

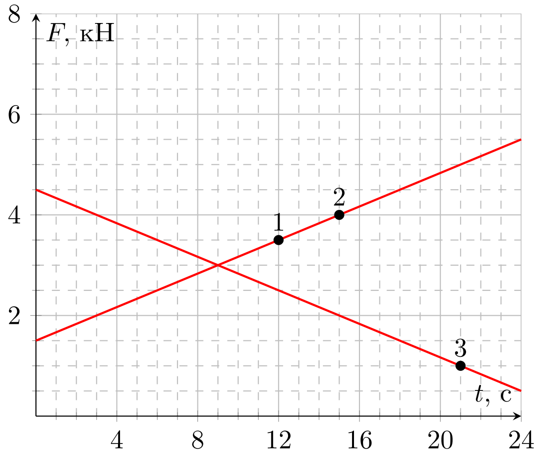
Видно, что в обоих случаях зависимость линейная. В первом — убывающая, а во втором — возрастающая, причем коэффициенты при t отличаются только знаком. Кроме того, в любой момент времени $F_1 + F_2 = Mg$.

Очевидно, что из трех точек какие-то 2 принадлежат одному графику, а оставшаяся — другому. Возможны три варианта. Однако точки 2 и 3, также как точки 1 и 3 не могут лежать на одной прямой. В этом случае второй график пересечет ось X позже, чем начнется движение (а такого быть не может — рельс бы опрокинулся еще до старта).

Покажем это аналитически. Предположим, что точки 2 и 3 принадлежат одному графику $F_1(t)$. Тогда уравнение прямой $F_1(t) = -0.5\frac{\text{Н}}{\text{с}}t + 11{,}5$ Н. В момент времени $t_1 = 12$ с из графика находим $F_2(t_1) = 3{,}5$ Н, и, с учётом полученного уравнения прямой, $F_1(t_1) = 5{,}5$ Н. В момент времени $t_0 = 0$ с находим $F_1(t_0) = 11{,}5$ Н. А, так как сумма показаний динамометров не изменяется, $F_2(t_0) = -2{,}5 \text{ Н} < 0$. Значит, наше предположение неверно.

Предположим теперь, что точки 1 и 3 принадлежат одному графику $F_1(t)$. Тогда уравнение прямой $F_1(t) = -\frac{5}{18}\frac{\text{Н}}{\text{с}}t + \frac{41}{6}$Н. В момент времени $t_2 = 15$ с из графика находим $F_2(t_2) = 4$ Н, и, с учётом полученного уравнения прямой, $F_1(t_2) = \frac{8}{3}\text{ Н} \approx 2{,}67$ Н. В момент времени $t_0 = 0$ с находим $F_1(t_0)\frac{41}{6}\text{ Н} \approx 6{,}83$ Н. А, так как сумма показаний динамометров не изменяется, $F_2(t_0) = -\frac{1}{6}\text{ Н} \approx -0{,}17 \text{ Н} < 0$. Следовательно, это предположение тоже неверно.

Значит, одному графику принадлежат точки 1 и 2. Тогда графики должны выглядеть так:



Сразу оговоримся, что поведение графиков нам точно известно только до 21-й секунды. Время движения рельса будет зависеть от его длины.

По графикам не сложно определить, что $Mg = 6$ кН. Откуда $M = 600$ кг. Если мысленно продлить графики до пересечения с осью X, то можно заметить, что расстояние l рельс проехал бы за 36 секунд. Значит его скорость — 0.25 м/с.

Что же касается минимальной длины рельса, то при её оценке мы можем отталкиваться только от известных нам крайних положений. В начальный момент времени расстояние от центра масс до дальней (правой) опоры — 6.75 м. А в последний доподлинно известный нам момент (точка 3) расстояние от центра масс до дальней (левой) опоры — 7.5 м. Откуда можно сделать вывод, что длина рельса не меньше $L_{\min} = 15$ м.

Шифр

$\sum$

8-Т1. По трубе

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Определена начальная скорость левого шарика относительно трубы $1{,}1V$.	1.0		
1.2	Определено время $\tau_1 = \frac{10L}{11V}$.	1.0		
2.1	Определена начальная скорость правого шарика относительно трубы $1{,}9V$.	1.0		
2.2	Определено время $\tau_2 = \frac{10L}{19V}$.	1.0		
3.1	Записано уравнение, равносильное уравнению $L + l_1 = 1.1V\tau$.	2.0		
3.2	Записано уравнение, равносильное уравнению $L + l_2 = 1.9V\tau$.	2.0		
3.3	Записано уравнение, равносильное уравнению $l_1 + l_2 = 2L$.	2.0		
3.4	Найдено время $\tau = \frac{4L}{3V}$. Ответ без приведённого правильного решения не засчитывается.	1.0		
4.1	Найдена скорость $u_1 = 1{,}2V$.	2.0		
4.2	Найдена скорость $u_2 = 1{,}8V$.	2.0		

Шифр

$\sum$

8-Т2. Изогнутая трубка

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Записана величина атмосферного давления через плотность жидкости $p_0 = 10\rho g h$	1.0		
1.2	Учтено, что гидростатическое давление в жидкости суммируется с внешним	2.0		
1.3	Записано верное равенство давлений, обеспечивающее равновесие в трубке при наличии пробки	3.0		
1.4	Найдено значение $x = 1.5$	2.0		
2.1	Обосновано направление смещения жидкостей	1.0		
2.2	Указано верное направление смещения	1.0		
2.3	Записано верное равенство давлений, обеспечивающее равновесие в трубке без пробки	3.0		
2.4	Найдена величина смещения $s = h/6$	2.0		

Шифр

$\sum$

8-Т3. Туда-сюда

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	**Метод 1.** Указано, что если масса воды не изменяется, то скорость нагрева равна $\Delta t/\Delta\tau = 5°C$/мин.	1.0		
1.2	**Метод 1.** Записано соотношение для определения конечной температуры $t_к = t_0 + 10\tau_0\frac{\Delta t}{\Delta\tau}$.	1.0		
1.3°	**Метод 2.** Высказана идея графического похода к решению задачи.	2.0		
1.4°	**Метод 2.** Правильно выбраны оси, нанесены точки 1 и 2, соблюдены требования к оформлению графиков.	3.0		
1.5	Определена конечная температура $t_к = 70°C$.	2.0		
2.1	**Метод 1.** Записано выражение для мощности $N = \frac{cm(t_2-t_1)}{\tau_2-\tau_1}$.	1.0		
2.2	**Метод 1.** Записано соотношение $8N\tau_0 = cm(t_{45} - t_0) + c\Delta m(t_x - t_0)$.	2.0		
2.3	**Метод 1.** Указано, что $\Delta m = m_{min}$ при $t_x = 45°C$	1.0		
2.4	**Метод 1.** Найдено значение m_{min}.	2.0		
2.5°	**Метод 2.** Обосновано поведение графика на втором участке, явно указано, что он будет лежать на прямой, проходящей через точку (0 мин.; 20°C).	2.0		
2.6°	**Метод 2.** Найдено значение m_{min}.	3.0		
3.1	**Метод 1.** $N\tau = cm(t_x - t_0) + c\Delta m(t_x - t_0)$.	2.0		
3.2	**Метод 1.** Учтено, что $m_{max} = m = 5$ кг.	1.0		
3.3	**Метод 1.** Найдено значение τ_{min}.	2.0		
3.4°	**Метод 2.** Найдено значение τ_{min}.	3.0		

Шифр

$\sum$

8-Т4. Ползущий рельс

№	Пункт разбалловки	Балл	Пр	Ап
1.1	Верно записано уравнение моментов относительно оси, проходящей через левую опору (или эквивалентное уравнение)	2.0		
1.2	Верно записано уравнение моментов относительно оси, проходящей через правую опору (или эквивалентное уравнение)	2.0		
1.3	Получено выражение зависимости показаний левого динамометра от времени	1.0		
1.4	Получено выражение зависимости показаний правого динамометра от времени	1.0		
1.5	Обосновано, что одному графику не могут принадлежать точки $1-3$ и $2-3$	1.0		
1.6	Указано, что одному графику не могут принадлежать точки $1-3$ и $2-3$	1.0		
1.7	Верно построены все графики	1.0		
1.8	Определена масса M	1.0		
2.1	Определена скорость v	2.0		
3.1	Определены расстояния от центра масс до дальней опоры в начальный и последний доподлинно известный момент времени	1.0		
3.2	Указано, что в момент, соответствующий точке 3, центр масс рельса максимально удален от опоры	1.0		
3.3	Определено значение L_{min}	1.0		