7.1.1. Пошаговый (рекуррентный) метод

Этот эвристический прием удобно применять в том случае, когда схема представляет собой большое число повторяющихся структурных элементов. Пошаговый метод основан на том, что результат первого действия (шага) используется во втором, а второй – в третьем и т.д., то есть число шагов зависит от числа повторяющихся структурных элементов. Задачи подобного типа встречаются довольно часто. Сущность эвристического приема заключается в пошаговой трансформации исходной электрической цепи.

ЗАДАЧА 89. Найти полное сопротивление цепи, изображенной на рисунке 63.

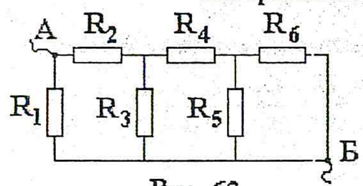


Рис. 63

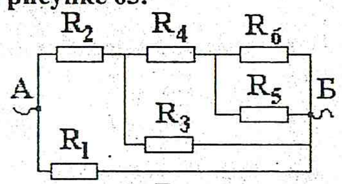


Рис. 64

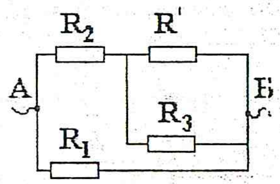


Рис. 65

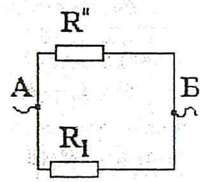


Рис. 66

РЕШЕНИЕ. Перечертим (трансформируем) схему в более удобный для расчетов и наглядный вид (рис. 64).

Теперь стало очевидным, что цепь представляет собой несколько “вложенных” друг в друга резисторов, соединенных параллельно. Начнем пошаговое вычисление эквивалентных сопротивлений, начиная с самых "внутренних" элементов. Заменяя резисторы R_4, R_5, R_6 их эквивалентным сопротивлением (обозначим его через R'), получим новую схему (см. рис. 65), где

$$R' = R_4 + \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6}.$$

Поступая аналогично с резисторами R_2, R_3 и "новым" резистором R'', получим в результате простую схему (рис. 66), где R'' определяется выражением:

$$R'' = R_2 + \frac{R' R_3}{R' + R_3}.$$

Эквивалентное сопротивление всей цепи равно

$$R_{общ} = \frac{R'' R_1}{R'' + R_1}.$$

Решение задач подобного типа значительно облегчается, если некоторые группы резисторов имеют одинаковые сопротивления.

Рассмотрим, например, следующую задачу.

ЗАДАЧА 90. Найти полное сопротивление цепи, изображенной на рисунке 67.

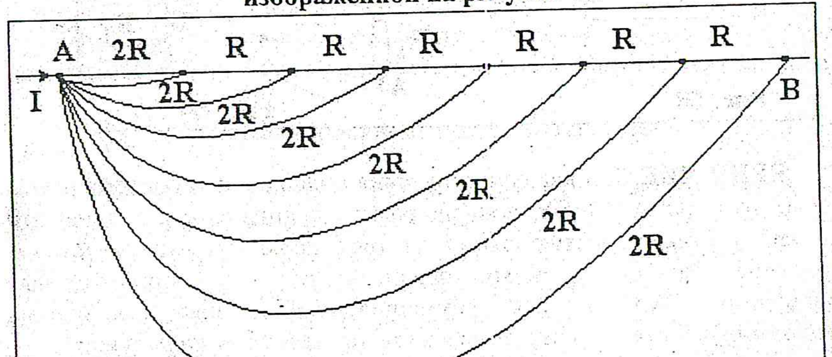


Рис. 67

РЕШЕНИЕ. Рассчитывать эквивалентное сопротивление цепи начнем слева – эвристический прием выбора последовательности действий при расчетах. Два параллельно соединенных резистора, сопротивления которых одинаковы и равны **2R** каждый, можно заменить эквивалентным сопротивлением **R**. Это сопротивление соединено последовательно с таким же по величине сопротивлением **R**. Заменим и эти два сопротивления одним эквивалентным сопротивлением **2R**. Два одинаковых сопротивления по **2R**, соединенных параллельно, можно заменить эквивалентным сопротивлением **R** и т.д. В результате получим эквивалентное сопротивление цепи, равное **R**.

7.1.2. Метод "деформации" схемы

Данный метод не дает конкретного "рецепта" – алгоритма решения задач, но во многом облегчает подход к этому решению. Эвристическая трансформация схемы, преобразования основаны на простом принципе: точки равного потенциала необходимо совместить (более подробно об этом будет сказано ниже).

Рассмотрим классический пример применения этого метода.

ЗАДАЧА 91. Найти полное сопротивление цепи, изображенной на рисунке 68.

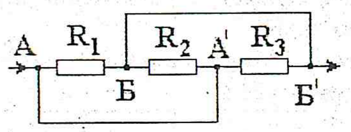


Рис. 68

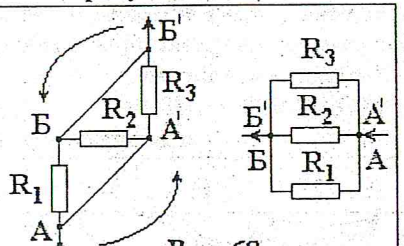


Рис. 69

РЕШЕНИЕ. Так как сопротивления подводящих проводов равны нулю, то точки **АА'** и **ББ'** попарно равнопотенциальны. Соединяя эти точки, получим простую схему из трех параллельных резисторов (рис. 69). Или иначе, можно предположить, что соединительные проводники **АА'** и **ББ'** резиноподобны и при сокращении деформируют схему, приводя ее к виду, показанному на рисунке 69.

Ответ задачи достаточно прост:

$$R_{общ} = \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}.$$

Рассмотрим более сложную задачу такого же типа.

ЗАДАЧА 92. Найти полное сопротивление цепи, изображенной на рис. 70А, если все сопротивления одинаковы и равны R.

РЕШЕНИЕ. Пронумеруем все узловые точки этой цепи, всего таких точек шесть (рис. 70А). Из этого рисунка видно, что потенциалы точек 1 и 3 одинаковы, так как они соединены проводником без сопротивления. Объединим эти точки в одну.

То же самое можно сказать и о точках 2 и 5, 4 и 6.

Для начала пометим резистор между точками 1 и 2 соответствующим индексом R_{12}. То же самое проделаем с остальными резисторами. Затем отметим на чертеже получившиеся три точки (рис. 70Б) и между ними разместим соответствующие резисторы – между точками 1, 3 и 2, 5 находятся только два резистора R_{23} и R_{12}.

Получившаяся в результате трансформации схема приведена на рисунке 70Б.

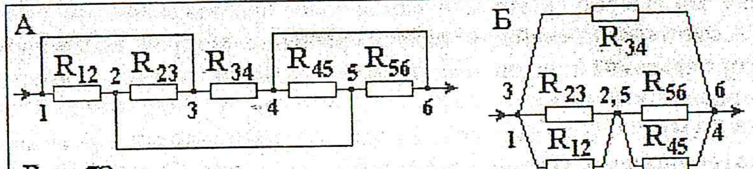


Рис. 70

Теперь легко рассчитать эквивалентное сопротивление цепи – оно равно **R/2**. Это и есть ответ ЗАДАЧИ 92.

Подобные эвристические деформации схем во многих случаях позволяют приблизиться к решению задачи или получить ее решение.

7.1.3. Метод равнопотенциальных узлов

В этом параграфе будут рассмотрены задачи, решение которых сопровождается последовательной трансформацией исходной схемы, причем наибольшее изменение схема обычно претерпевает после первого эвристического шага, связанного с использованием метода равнопотенциальных точек (узлов) схем. Дальнейшие преобразования связаны с эквивалентной заменой последовательно или параллельно соединенных резисторов. Такие задачи представляют определенный учебный интерес для развития творческих способностей учащихся, они довольно часто встречаются в различных учебных пособиях. Обычно это симметричные цепи, составленные из одинаковых элементов. Они представляют собой, как правило, цепи, не имеющие ни последовательно, ни параллельно соединенных резисторов.

Для преобразования (трансформации) цепи и дальнейшего расчета ее сопротивления воспользуемся тем свойством, что ***во всякой цепи точки с одинаковыми потенциалами можно соединять в узлы***.

И обратное положение: ***узел цепи можно разделять, если после разделения узла потенциалы точек, образовывавших узел, остаются одинаковыми***.

Подчеркнем: ***такое разделение возможно лишь в случае, если потенциалы получившихся точек (узлов) одинаковы***, поэтому в каждом конкретном случае обязательна проверка равенства потенциалов точек (узлов), получившихся в результате разделения. Упрощение подобного рода возможно потому, что ток между этими точками не идет, можно между ними и включать резисторы. Естественно, этими эвристиками рекомендуется пользоваться в тех случаях, когда в результате получается более простая схема.

Рассмотрим простейшую задачу, решение которой необходимо для формирования представлений о точках цепи, имеющих равные потенциалы.

ЗАДАЧА 93. На участке АБ схемы укажите точки с равными потенциалами. Проволочные резисторы (рис. 71 а) однородны по всей длине.

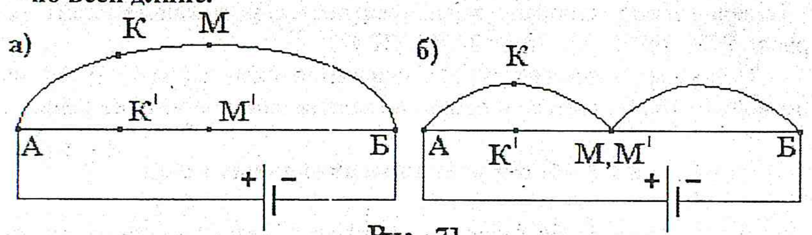


Рис. 71

РЕШЕНИЕ. Предположим, потенциал точки **А** равен 10 В, а потенциал точки В равен нулю – точка В заземлена. От точки **А** до точки **Б** потенциал ***равномерно и непрерывно*** уменьшается от 10 В до нуля, так как резисторные проволоки однородны.

Предположим, в некоторой точке **М** потенциал равен 5 В. Тогда на прямой **АБ** обязательно найдется точка **М'**, потенциал которой также равен 5 В. Аналогично и для точек **К** и **К'**, потенциалы которых равны (из рисунка видно, что их потенциалы приблизительно равны 7,5 В). Таких точек с равными потенциалами для данной цепи можно указать бесчисленное множество.

Если теперь точки **М** и **М'** соединить любым резистором или просто совместить эти точки (рис. 71 б), сопротивление цепи не изменится. Справедливо и обратное утверждение – узел **ММ'** можно разделить на два узла: **М** и **М'**. Отметим существенный факт, что **при этих трансформациях цепи распределение токов по элементам цепи остается без изменений.**

7.1.3.1. Метод исключения "пассивных" цепей

Любой резистор цепи, находящийся между узлами с равными потенциалами, можно исключить из цепи, так как ток по нему не течет. В этом случае резистор играет "пассивную" роль в данной схеме. Эту эвристическую операцию можно провести с любым элементом цепи, который находится между точками цепи с равными потенциалами.

ЗАДАЧА 94. Найти полное сопротивление цепи, изображенной на рисунке 72, если все сопротивления одинаковы и равны R. Сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

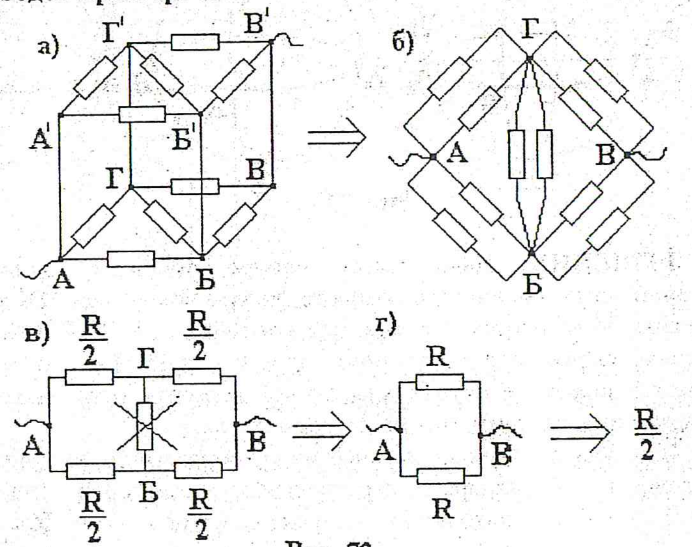


Рис. 72

РЕШЕНИЕ. Используем эвристический прием "деформации" схем – "объемную" схему преобразуем в схему на плоскости. Для этого соединим попарно точки **А** и **А'**, **Б** и **Б'**, **В** и **В'**, **Г** и **Г'**, т.е. верхнюю плоскость куба (рис. 72 а) "опустим" на нижнюю, так как сопротивление соединительных проводов равно нулю.

Если на получившуюся схему посмотреть сверху, то получим "новую" схему, изображенную на рисунке 72 б.

Из симметричности (равноправия) ветвей цепи видно, что точки **Б** и **Г** имеют равные потенциалы. Резисторы, находящиеся между этими точками, играют "пассивную" роль, ток через них не проходит.

Поэтому их можно исключить из цепи, и эквивалентное сопротивление цепи от этого не изменится. После их исключения легко найти (рис. 72 в, 72 г) эквивалентное сопротивление всей цепи. Окончательный результат – **R/2**.

ЗАДАЧА 95. Найти полное сопротивление цепи, которая представляет собой фигуру, составленную из трех одинаковых обручей (рис. 73). Сопротивление каждой полуокружности обруча равно R.

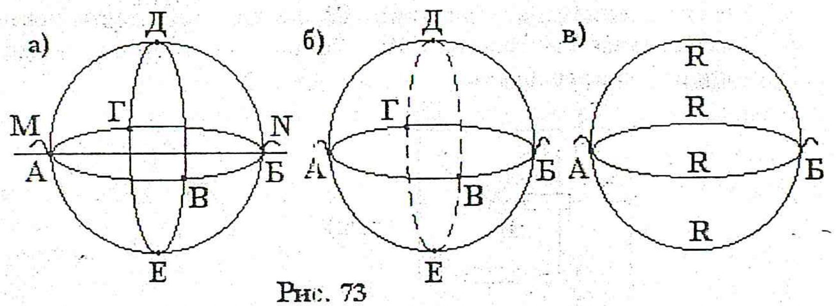


Рис. 73

РЕШЕНИЕ. Цепь имеет четыре точки с одинаковыми потенциалами, так как при повороте фигуры вокруг оси **MN** эти точки поочередно меняются местами. Все эти точки **В, Г, Д, Е** находятся «в равных условиях» и неотличимы друг от друга. Так как эти точки имеют одинаковые потенциалы, то все элементы цепи, находящиеся между этими точками, можно исключить (см. рис. 73 б).

В результате этих эвристических преобразований получится цепь, состоящая из четырех параллельных резисторов (рис. 73 в). Эквивалентное сопротивление получившейся цепи равно **R/4**.

Рассмотрим решение несколько другой задачи.

ЗАДАЧА 96. Найти полное сопротивление цепи, которая представляет собой каркас, составленный из отрезков одинаковых проволок (рис. 74 а). Сопротивление каждой проволоки каркаса равно R.

РЕШЕНИЕ. Посмотрим слева внутрь каркаса и изобразим увиденное в перспективе (рис. 74 б). Из рисунка видно, что потенциалы точек 4, 8 и 12 одинаковы, поэтому соответствующие элементы каркаса 4 – 8 и 8 – 12 являются «пассивными» и их можно исключить из рассмотрения.

Аналогично можно сказать о равенстве потенциалов точек 2, 6 и 10. Элементы каркаса 2 – 6 и 6 – 10 можно также исключить из рассмотрения. В результате получим эквивалентную схему, изображенную на рисунке 74 в.

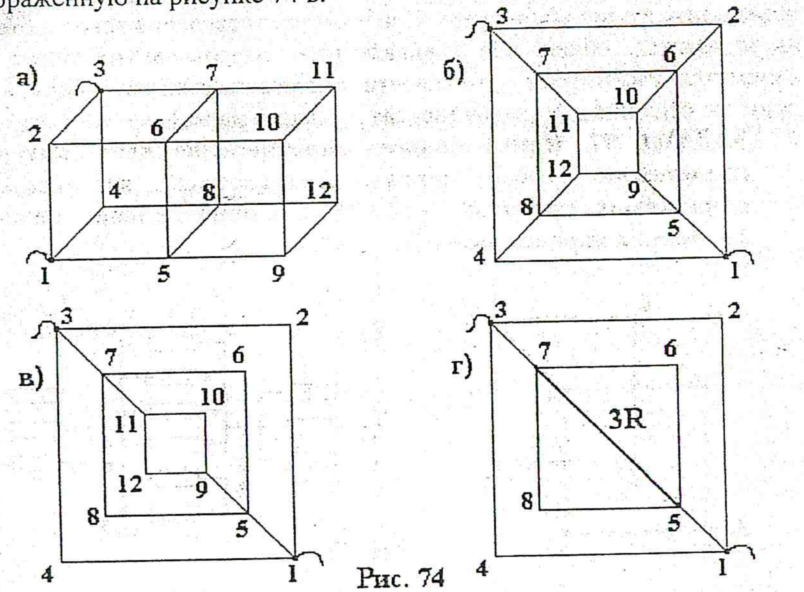


Рис. 74

Сопротивление внутренней части цепи между узлами 5 и 7 легко посчитать, оно равно **3R**. Обозначим это эквивалентное сопротивление на схеме (рис. 74 г) и опять найдем сопротивление внутренней части цепи между узлами 1 и 3. Это сопротивление равно **2,75 R**. Теперь легко найти эквивалентное сопротивление всей цепи между узлами 1 и 3. Сопротивление равно **11R/15**.

При решении этих задачах мы воспользовались ***методом исключения «пассивных» элементов*** между узлами с равными потенциалами, что приводило в общем случае к трансформации цепи, в результате чего получалась новая схема цепи с эквивалентным сопротивлением.

Если узлы с равными потенциалами соединить друг с другом накоротко, то это также не повлияет на общее сопротивление цепи. Отсюда следует еще один метод решения подобных задач, основанный на ***эвристическом приеме объединения узлов с равными потенциалами (равнопотенциальных узлов)***.

7.1.3.2. Метод объединения равнопотенциальных узлов

Метод объединения равнопотенциальных узлов основан на том, что два или несколько узлов с одинаковыми потенциалами можно объединить в один общий узел. При этом распределение токов в схеме не изменится, общее или эквивалентное сопротивление также не изменится. Рассмотрим возможности и преимущества этого метода на примере решения двух задач (первая решалась ранее).

ЗАДАЧА 97. Найти полное сопротивление цепи, которая представляет собой каркас, составленный из отрезков одинаковых проволок (рис. 75 а). Сопротивление каждой проволоки каркаса равно R.

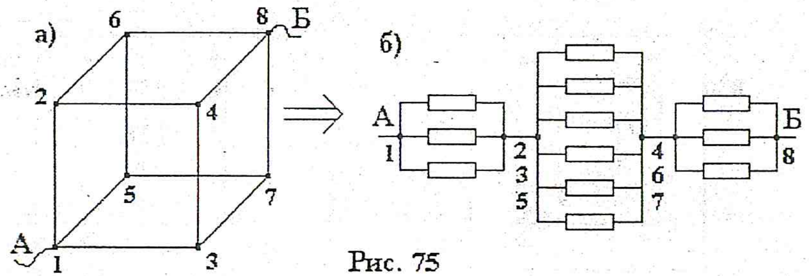


Рис. 75

РЕШЕНИЕ. Из рисунка 75 а следует, что точки 2, 3, 5 совершенно равнозначны и имеют одинаковые потенциалы, так как расположены симметрично относительно воображаемой оси АБ. И действительно, из соображений симметрии ясно, что токи, идущие по ветвям 1-2, 1-3, 1-5 – одинаковы. А так как все элементы (резисторы) куба по условию задачи одинаковы, то и потенциалы указанных точек будут одинаковыми. Аналогично и для точек 4, 6 и 7, которые также имеют одинаковые потенциалы.

Соединим друг с другом точки с равными потенциалами 2, 3, 5 и точки 4, 6, 7 и получим эквивалентную схему, изображенную на рисунке 75 б. Теперь легко посчитать сопротивление получившейся эквивалентной схемы, состоящей из трех последовательных звеньев с параллельно соединенными резисторами. Сопротивление каждого звена равно соответственно **R/3, R/6, R/3**.

Общее сопротивление цепи равно сумме этих сопротивлений. В результате получим ответ: **5R/6**.

ЗАДАЧА 98. Найти полное сопротивление цепи, которая представляет собой каркас – куб, составленный из отрезков одинаковых проволок (рис. 76 а). Сопротивление каждой проволоки каркаса равно R.

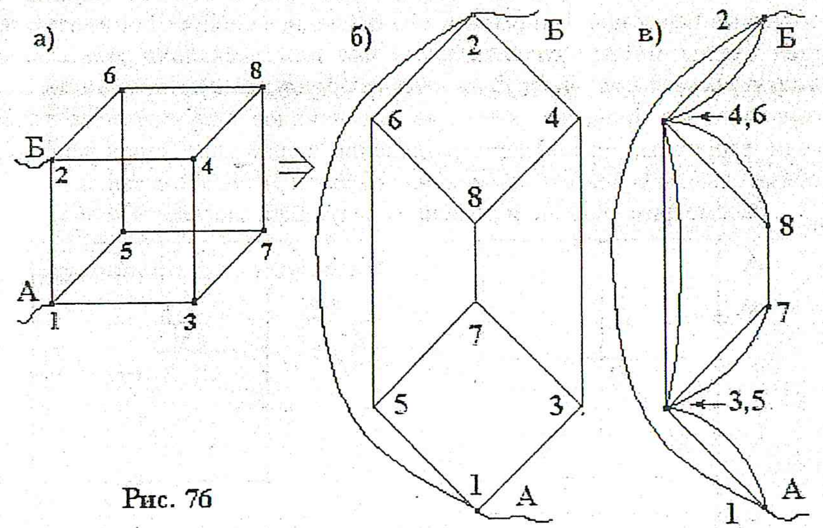


Рис. 76

РЕШЕНИЕ. Мысленно отсоединим резистор, находящийся между точками 1-2, растянем кубик и присоединим к выводам **А** и **Б** резистор 1-2, который на рисунке 76 б изображен отрезком дуги. Из симметрии части схемы (часть схемы без резистора 1-2) следует, что потенциалы точек 4, 6 одинаковы. Потенциалы точек 3 и 5 также равны, т.е. эти точки попарно равнопотенциальны.

Соединив узлы 4 с 6 и 3 с 5, получим эквивалентную схему, сопротивление которой легко посчитать. После простых преобразований получим эквивалентную схему (рис. 77), состоящую из параллельно и последовательно соединенных резисторов с известными сопротивлениями. Эквивалентное сопротивление этой схемы легко определить.

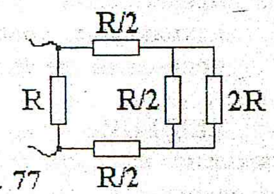


Рис. 77

Рассчитанное таким образом сопротивление схемы равно **7R/12**.

7.1.3.3. Метод разделения узлов

Метод разделения узлов схемы является логическим продолжением двух предыдущих и основан на том, что если возможно объединение двух равнопотенциальных узлов, то возможны и обратные переходы. Напомним, что последнее следует понимать так: ***узел схемы можно разделить на два или несколько узлов, если получившиеся при этом узлы имеют одинаковые потенциалы.*** Это означает, что проверка равенства потенциалов получившихся точек (или вторичных узлов) при разделении первичных узлов является обязательным условием применения ***метода разделения узлов***.

Рассмотрим условие и решение следующей задачи.

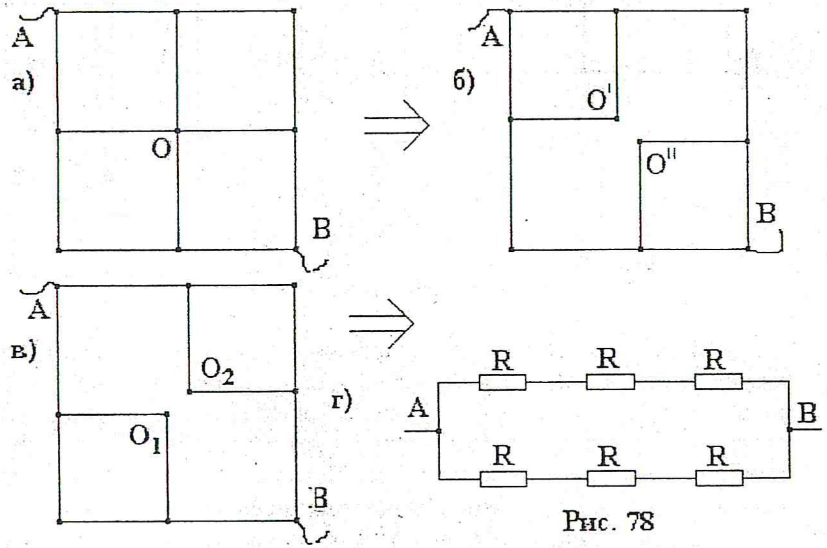


Рис. 78

ЗАДАЧА 99. Найти полное сопротивление цепи, которая представляет собой каркас, составленный из отрезков одинаковых проволок (рис. 78 а). Сопротивление каждой проволоки каркаса равно R.

РЕШЕНИЕ. Разделим узел O (рис. 78 а) на два узла O' и O'', как показано на рисунке 78 б. Из рисунка видно, что потенциалы получившихся узлов O' и O'' не равны. Это означает, что такое разделение узла O не допустимо.

Разделим узел O (рис. 78 а) на два других узла O_1 и O_2, как показано на рисунке 78 в. Из этого рисунка видно, что потенциалы получившихся узлов O_1 и O_2 равны. Это означает, что такое разделение узла O не только допустимо, но и желательно, так как сопротивление получившейся в результате этого преобразования эквивалентной схемы легко найти.

После несложных расчетов получим эквивалентную схему, которая приведена на рисунке 78 г, сопротивление которой легко определить. Оно равно **3R/2**.

Рассмотрим следующую задачу.

ЗАДАЧА 100. Найти полное сопротивление цепи, которая представляет собой каркас, составленный из отрезков одинаковых проволок (рис. 79 а). Сопротивление каждой проволоки каркаса равно R.

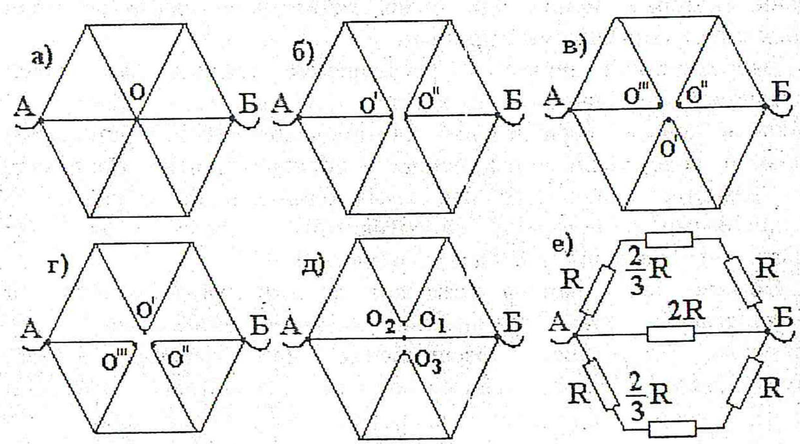


Рис. 79

РЕШЕНИЕ. Узел O схемы (рис. 79 а) можно разделить на несколько узлов разными способами. На рисунке 79 б приведен вариант разделения узла O на два узла O' и O''. Потенциалы получившихся узлов не будут одинаковыми, поэтому это деление узла приводит к изменению значения сопротивления всей цепи.

На рисунке 79 в и 79 г приведены другие варианты разделения узла O, но уже на три узла O', O'' и O'''. Потенциалы получившихся узлов и в этих случаях не будут одинаковыми. Поэтому и эти деления узла приводят к изменению значения сопротивления всей цепи.

Рассмотрим вариант деления узла **O** на три узла O_1, O_2 и O_3, изображенный на рисунке 79 д. Получившаяся схема оказывается симметричной относительно «входа» и «выхода», относительно точек **А** и **Б**. Потенциалы точек O_1, O_2 и O_3 будут одинаковы и равны половине разности потенциалов между точками **А** и **Б**. В результате этого преобразования искомое сопротивление легко находится с помощью поэтапного расчета. Получившаяся промежуточная схема этого расчета приведена на рисунке 79 е, сопротивление которой равно **4R/5**.

7.1.3.4. Метод расщепления (разделения) ветвей

Метод расщепления ветвей представляет большой интерес. Хотя он и похож на предыдущие методы, но позволяет очень просто решать задачи, которые имели бы очень громоздкое решение, если пользоваться уравнениями Кирхгофа.

Эвристический прием – расщепление (разделение) ветвей исследуемой электрической - цепи основан на том, что, если возможна замена нескольких параллельных или последовательных резисторов одним, то совершенно «правомочна» и обратная замена. Например, один резистор можно заменить двумя одинаковыми, параллельно соединенными резисторами, сопротивления которых в два раза больше сопротивления заменяемого резистора.

Обычно такая замена возможна в симметричных цепях ***и предполагает затем применение метода разделения узлов***. Интересно, что после расщепления или слияния ветвей, получающаяся схема остается симметричной относительно «входа» и «выхода» цепи, эквивалентное сопротивление которой необходимо определить.

Разумеется, после такой операции распределение токов в электрической схеме изменяется, но это изменение имеет место только в расщепляемой ветви.

Задачи такого типа более сложны, хотя бы в силу того, что их решение требует использование двух эвристических приемов.

ЗАДАЧА 101. Найти полное сопротивление цепи, которая представляет собой каркас, составленный из отрезков одинаковых проволок (рис. 80 а). Сопротивление каждой проволоки каркаса равно R.

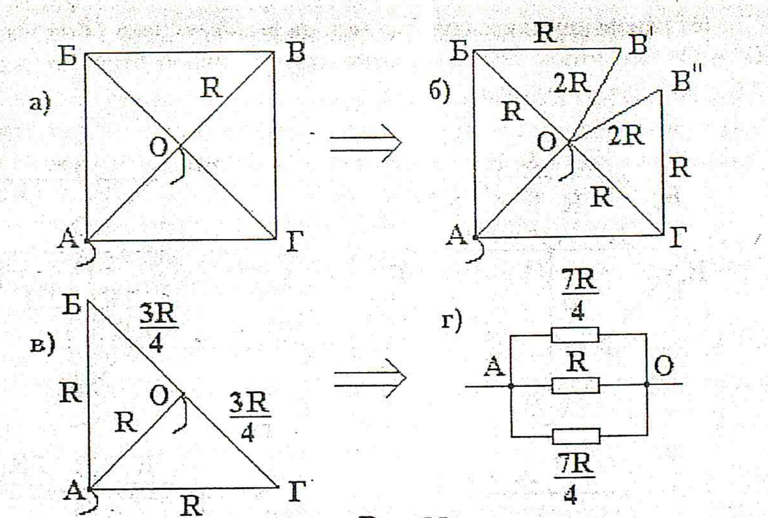


Рис. 80

РЕШЕНИЕ. Заменим резистор **OB**, сопротивление которого равно **R**, на два параллельных резистора по **2R** каждый. Общее сопротивление цепи от этого не изменится. На основании предыдущего метода разобьем узел **В** на два узла: **B'** и **B''**, как изображено на рисунке 80 б. Получившаяся схема симметрична относительно оси **АО** и отсюда следует, что узлы **B'** и **B''** имеют одинаковые потенциалы. Это означает, что разделение узла **В** произведено корректно, и общее сопротивление цепи осталось без изменения. В итоге получилась схема, состоящая только из параллельных и последовательных резисторов (рис. 80 б). После несложных расчетов (на рисунках 80 в и 80 г приведены промежуточные этапы расчетов) получим ответ: **7R/15**.

ЗАДАЧА 102. Найти полное сопротивление цепи, которая представляет собой пятиугольный каркас, составленный из отрезков одинаковых проволок (рис. 81 а). Сопротивление каждого отрезка проволоки каркаса равно R.

РЕШЕНИЕ. Заменим резистор **OB** сопротивлением **R**, на два параллельных резистора по **2R** каждый (рис. 81 б). Общее сопротивление цепи от этого не изменится.

На основании предыдущего метода разобьем узел **О** на два узла: О' и О" так, чтобы схема осталась симметричной относительно оси АБ – «входа» и «выхода».

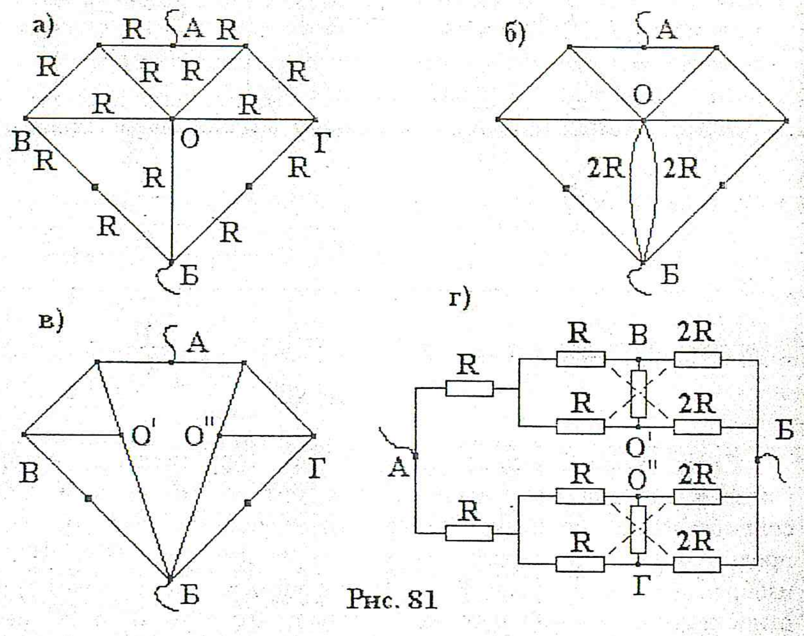


Рис. 81

Получившаяся схема (рис. 81 в) действительно симметрична относительно оси **АБ,** и отсюда следует, что узлы **О'** и **О"** имеют одинаковые потенциалы. Это означает, что разделение узла **О** было произведено корректно, и общее сопротивление цепи осталось без изменения.

Представим получившуюся схему в несколько ином виде, удобном для дальнейшего решения задачи (рис. 81 г). Из этого рисунка (как и из рис. 81 в) видно, что точки **О'** и **В**, **О"** и **Г** имеют одинаковые потенциалы. Выбросим из дальнейшего рассмотрения пассивные элементы схемы **О'В** и **О"Г.**

В итоге получится схема, состоящая только из параллельных и последовательных резисторов (рис. 81 б), общее сопротивление которых легко рассчитать.

После стандартных расчетов получим, что эквивалентное сопротивление цепи равно **5R/4**.

7.1.4. Расчет эквивалентных сопротивлений бесконечных цепей

Особую группу образуют задачи на расчет эквивалентных сопротивлений бесконечных цепей. Как правило, эти цепи симметричны и во многих случаях содержат одинаковые элементы (резисторы).

Рассматриваемые задачи можно разбить на три группы:

а) линейные (одномерные);

б) плоскостные (двумерные);

в) объемные (трехмерные).

Эвристические приемы решения подобных задач просты и достаточно оригинальны. Причем последние два типа задач решаются только с помощью искусственного приема, содержание которого будет рассмотрено ниже.

7.1.4.1. Расчет эквивалентных сопротивлений линейных бесконечных цепей

Найдем эквивалентное сопротивление типичной линейной бесконечной цепи резисторов, которая состоит из повторяющихся элементов (секций).

Рассмотрим типичную задачу.

ЗАДАЧА 103. Найти эквивалентное сопротивление бесконечной цепочки (рис. 82), которая состоит из одинаковых резисторов. Сопротивление каждого резистора равно **R**.

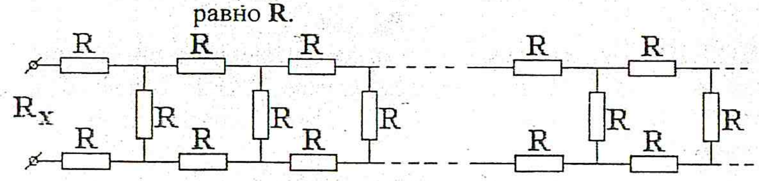


Рис. 82

РЕШЕНИЕ. Задачи подобного рода решаются с помощью известного эвристического приема, который позволил построить соответствующий алгоритм, и следовательно, задачи имеют типовое решение. Суть эвристического приема заключается в следующем. Для нахождения эквивалентного сопротивления цепи необходимо выделить общую секцию, которая бесконечно повторяется. Вполне очевидно, что если отделить ее от цепи, то общее сопротивление этой цепи не изменится, так как число элементов (секций) бесконечно.

В силу вышесказанного, выделив повторяющуюся секцию в цепи и заменив сопротивление остальной оставшейся части цепи искомым сопротивлением R_x, получим эквивалентную схему, изображенную на рисунке 83. Найдем сопротивление цепи, предварительно записав выражение для R_x через R_x. Опуская промежуточные выкладки, получим:

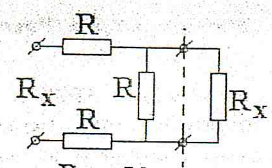


Рис. 83

$$R_x = 2R + \frac{RR_x}{R + R_x},$$

или

$$R_x^2 - 2RR_x - 2R^2 = 0,$$

откуда получим ответ:

$$R_x = R(\sqrt{3} + 1).$$

Рассмотрим еще одну подобную задачу.

ЗАДАЧА 104. Найти эквивалентное сопротивление бесконечной цепочки (рис.84), которая состоит из одинаковых резисторов. Сопротивление каждого резистора равно R.

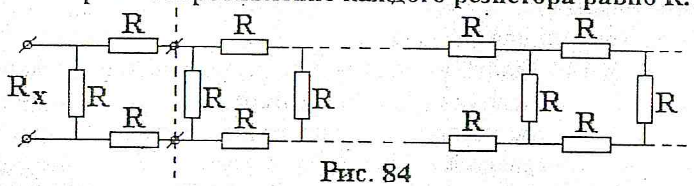


Рис. 84

РЕШЕНИЕ. Прием, лежащий в основе решения этой задачи, точно такой же, как и в предыдущем случае. Разница только в виде повторяющейся секции (рис. 85). После аналогичных расчетов получим:

$$R_x^2 + 2RR_x - 2R^2 = 0.$$

Отсюда легко записать ответ:

$$R_x = R(\sqrt{3} - 1).$$

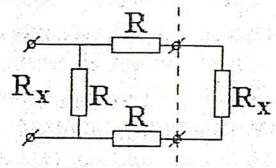


Рис. 85

Можно сформулировать ряд более сложных задач на расчет эквивалентных схем, решение которых «опускается» до уровня алгоритмических после решения задач 103 и 104 и формирования соответствующего алгоритма решения.

ЗАДАЧА 105. Найти эквивалентное сопротивление между точками А и Б бесконечной цепочки (рис. 86), которая состоит из одинаковых резисторов. Сопротивление каждого резистора равно R.

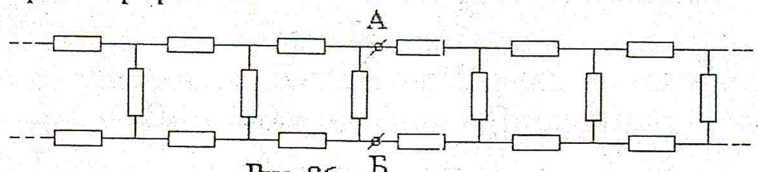


Рис. 86

РЕШЕНИЕ. Из рисунка 86 следует, что эквивалентное сопротивление цепи (смотрите решения задач 103 и 104) равно сопротивлению двух параллельно соединенных резисторов, сопротивления которых равны

$R_1 = R(\sqrt{3} + 1)$ – слева и $R_2 = R(\sqrt{3} - 1)$ – справа.

После простых расчетов легко получить ответ задачи:

$$R_x = \frac{R\sqrt{3}}{3}.$$

ЗАДАЧА 106. Найти эквивалентное сопротивление между точками А и Б бесконечной цепочки (рис. 87), которая состоит из одинаковых резисторов. Сопротивление каждого резистора равно R.

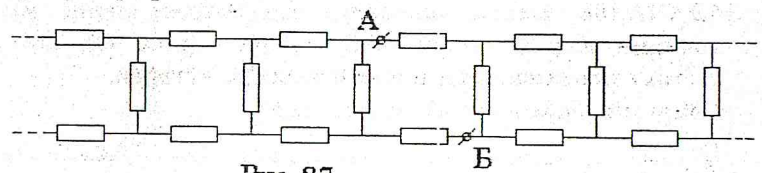


Рис. 87

РЕШЕНИЕ. Из рисунка 87 следует, что эквивалентное сопротивление цепи равно сопротивлению двух одинаковых и параллельно соединенных резисторов, сопротивление каждого из которых равно (смотрите решения задач 103 и 104)

$$R_1 = R_2 = R\sqrt{3}.$$

Отсюда легко получить ответ: $R_x = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

ЗАДАЧА 107. Найти эквивалентное сопротивление между точками А и Б бесконечной цепочки (рис. 88), которая состоит из одинаковых резисторов. Сопротивление каждого резистора равно R.

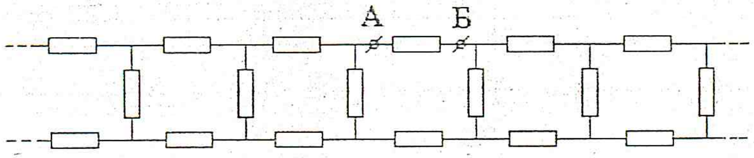


Рис. 88

РЕШЕНИЕ. Из рисунка 88 следует, что эквивалентное сопротивление цепи равно сопротивлению четырех резисторов, соединенных между собой в цепь, которая изображена на рисунке 89. Сопротивление каждого из этих резисторов равно (смотрите решения задач 103 и 104)

$$R \text{ и } R_1 = R(\sqrt{3}-1).$$

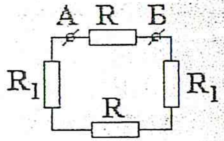


Рис. 89

Отсюда легко получить искомое эквивалентное сопротивление цепи между точками А и Б:

$$R_x = \frac{R(6-\sqrt{3})}{6}.$$

ЗАДАЧА 108. Найти эквивалентное сопротивление между точками А и Б бесконечной цепочки (рис. 90), которая состоит из одинаковых проволочных резисторов. Сопротивление каждого резистора R.

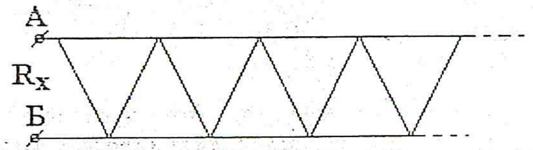


Рис. 90

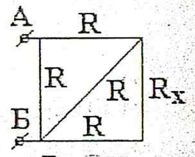


Рис. 91

РЕШЕНИЕ. На рисунке 91 представлена схема, эквивалентная заданной. В качестве повторяющейся секции в этом случае выбрана часть схемы, состоящая из четырех элементов (резисторов). Из последней схемы найдем полное сопротивление цепи, полагая, что

$$R_{АБ} = R_x.$$

Опуская промежуточные выкладки, получим:

$$R_x = \frac{3R^2 + 2R_xR}{5R + 3R_x},$$

или

$$R_x^2 + RR_x - R^2 = 0,$$

откуда следует, что

$$R_x = -\frac{R}{2} + \frac{R}{2}\sqrt{5} \quad \text{и} \quad R_x^1 = -\frac{R}{2} - \frac{R}{2}\sqrt{5}.$$

Второй корень уравнения отрицательный и не имеет смысла.

Окончательный результат расчетов – ответ - имеет вид:

$$R_x = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Рассмотрим следующую, более трудную задачу, решение которой предполагает предварительное использование метода исключения «пассивных» элементов цепи.

ЗАДАЧА 109. Найти эквивалентное сопротивление между точками А и Б бесконечной цепочки (рис. 92 а), которая состоит из одинаковых проволочных резисторов. Сопротивление каждого резистора R.

РЕШЕНИЕ. На рисунке 92 а изображена бесконечная цепочка – каркас, составленный из одинаковых проволок – резисторов.

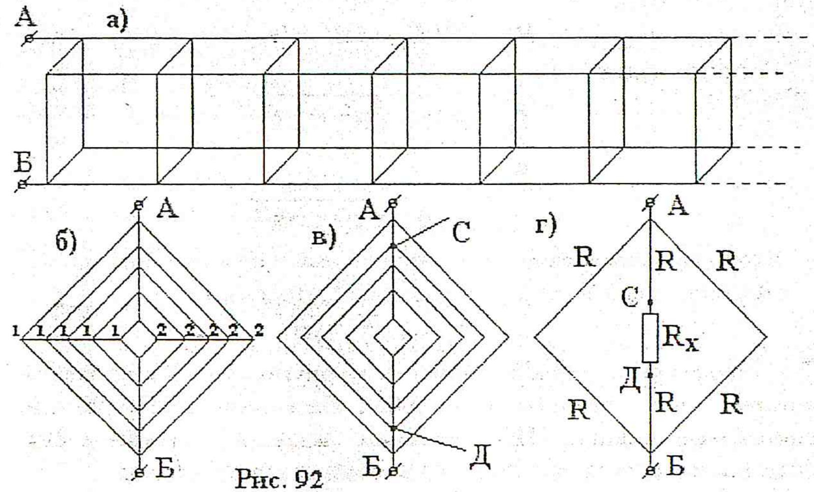


Рис. 92

Как известно, для нахождения эквивалентного сопротивления цепи необходимо сначала выделить общую секцию, которая бесконечно повторяется. Понятно, что если отделить ее от цепи, то общее сопротивление этой цепи не изменится, так как число элементов (секций) бесконечно.

Однако выделить повторяющуюся секцию в рассматриваемой цепи можно, но заменить сопротивление остальной части цепи искомым сопротивлением R_x нельзя, так как оставшаяся часть имеет четыре соединительных провода.

Если посмотреть на каркас слева, то получим изображение цепи в перспективе, приведенное на рисунке 92 б. Этот рисунок облегчает решение задачи. Из симметрии этого рисунка видно, что потенциалы точек, обозначенных цифрой **1**, одинаковы. Одинаковы и потенциалы точек, обозначенных цифрой **2**.

Выбросим из рассмотрения «пассивные» резисторы, соединяющие точки **1** и **2** (рис. 92 в). Между точками **С** и **Д** (рис. 92 в) находится фигура, эквивалентное сопротивление которой равно искомому, так как цепь бесконечна.

Обозначив искомое сопротивление через **Rx** (рис. 92 г), получим (аналогично решению ЗАДАЧИ 103):

$$R_x = \frac{R(2R+R_x)}{R+2R+R_x},$$

или

$$R_x^2 + 2RR_x - 2R^2 = 0,$$

откуда следует, что

$$R_x = -R + \sqrt{R^2 + 2R^2}$$

и

$$R^1_x = -R - \sqrt{R^2 + 2R^2}.$$

Второй корень уравнения отрицательный и не имеет смысла.

Окончательный результат расчетов – ответ - имеет вид:

$$R_x = (\sqrt{3} - 1)R .$$

Аналогичные решения имеют и другие подобные задачи, в которых цепи представляют собой бесконечно повторяющиеся, одинаковые секции. При решении задач с ***плоскостными*** и ***объемными*** цепями используется несколько другой подход.

7.1.4.2. Расчет эквивалентных сопротивлений плоскостных бесконечных цепей

Рассмотрим несколько задач на расчет эквивалентных сопротивлений электрических цепей, представляющих собой бесконечно протяженную «сетку» резисторов, составленных из треугольников, квадратов или других фигур. Эти фигуры лежат на плоскости и образуют «плоскостные» бесконечные цепи. Обычно сопротивления всех резисторов одинаковые, в противном случае расчет эквивалентных схем становится практически невозможным.

Рассмотрим эвристический прием решения первой задачи, ставшей типичной задачей подобного рода, который позволит создать алгоритм решения этих задач.

ЗАДАЧА 110. **Найти эквивалентное сопротивление между двумя соседними узлами А и Б бесконечной проволочной сетки (рис. 93), если сопротивление каждого прямолинейного проводника, соединяющего два ближайших узла сети, равно R.**

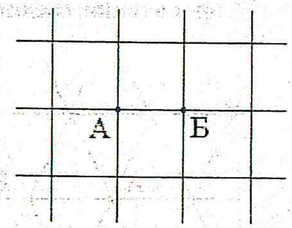


Рис. 93

РЕШЕНИЕ. Предположим, что имеется один электрод, с которого стекает ток i, и он приложен к точке **А**. Второй электрод представляет собой кольцо бесконечного радиуса, которое «накинуто» на эту сетку в бесконечности.

Из соображений симметрии, ток распределится на сети резисторов так, что в точке **Б** подходил бы ток, равный $i/4$ (рис. 94 а). С другой стороны, если в точке **Б** снимается ток, подводимый к схеме из бесконечности, то очевидно, должна наблюдаться аналогичная картина. Это означает, что для электрода, «собирающего» ток i и приложенного к точке **Б**, распределение токов будет таким же. Через ветвь **АБ** к точке **Б** будет подходить ток $i/4$ (рис. 94 б).

Распределение токов для двух электродов является суммой распределения токов от отдельных электродов, следовательно, при подключении рассматриваемой сети к источнику в точках **А** и **Б** через ветвь **АБ** будет протекать ток

$$i/4 + i/4 = i/2.$$

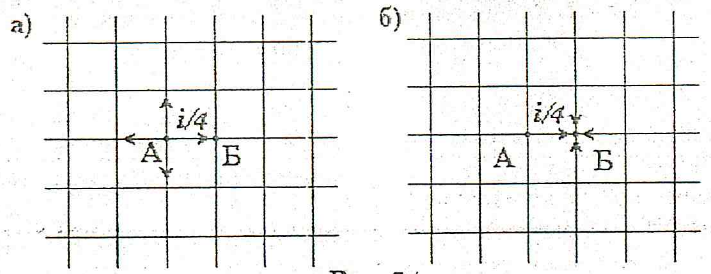


Рис. 94

Это означает, что напряжение между точками **А** и **Б** будет равно

$$U_{АБ} = Ri/2.$$

Отсюда найдем искомое эквивалентное сопротивление

$$R_x = U_{АБ}/i = R/2.$$

Ответ: $R_x = R/2$.

ЗАДАЧА 111. Найти эквивалентное сопротивление между двумя соседними узлами А и Б бесконечной проволочной сетки (рис. 95), если сопротивление прямолинейного проводника, соединяющего два ближайших узла сети, равно R.

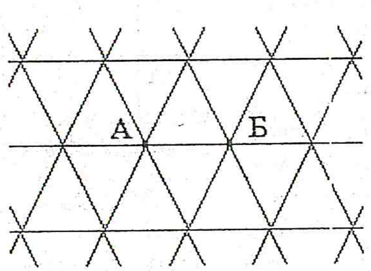


Рис. 95

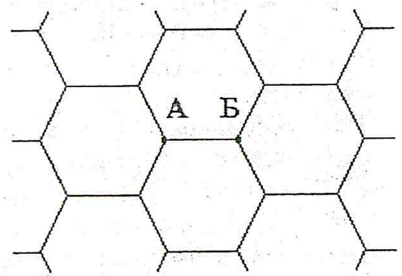


Рис. 96

РЕШЕНИЕ. Решение этой задачи аналогично предыдущей.
Из соображений симметрии запишем (см. задачу 110)

$$i/6 + i/6 = i/3.$$

Это означает, что напряжение между точками **А** и **Б** будет равно

$$U_{АБ} = Ri/3.$$

Отсюда найдем искомое эквивалентное сопротивление

$$R_x = U_{АБ}/i = R/3.$$

Ответ: $R_x = R/3$.

ЗАДАЧА 112. Найти эквивалентное сопротивление между двумя соседними узлами А и Б бесконечной проволочной сетки (рис. 96), если сопротивление прямолинейного проводника, соединяющего два ближайших узла сети, равно R.
РЕШЕНИЕ. Решение этой задачи аналогично предыдущим.
Из соображений симметрии запишем (см. задачу 110)

$$i/3 + i/3 = 2i/3.$$

Это означает, что напряжение между точками **А** и **Б** будет равно

$$U_{АБ} = R2i/3.$$

Отсюда найдем искомое эквивалентное сопротивление

$$R_x = U_{АБ}/i = 2R/3.$$

Ответ: $R_x = 2R/3$.

7.1.4.3. Расчет эквивалентных сопротивлений объемных бесконечных цепей

ЗАДАЧА 113. Найти эквивалентное сопротивление между двумя соседними узлами А и Б бесконечного проволочного каркаса (рис. 97), если сопротивление прямолинейного проводника, соединяющего два ближайших узла этого каркаса, равно R.

РЕШЕНИЕ. Решение этой задачи будет аналогично предыдущим. Из тех же соображений симметрии запишем

$$i/6 + i/6 = i/3.$$

Это означает, что напряжение между точками **А** и **Б** будет равно

$$U_{АБ} = Ri/3.$$

Отсюда найдем искомое эквивалентное сопротивление

$$R_x = U_{АБ}/i = R/3.$$

Ответ: $R_x = R/3$.

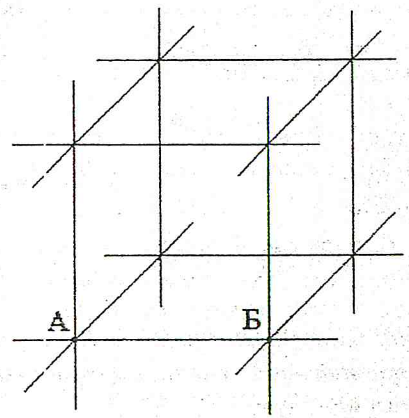


Рис. 97

Все эти задачи решались по свернутому алгоритму, который легко сформулировать после решения первой задачи. Составление алгоритма таким способом по уровню выше, чем запись алгоритмов, как эмпирического обобщения некоторого числа решенных задач. Это более высокий уровень обобщения – теоретический.

7.2. Расчет цепей по правилам Кирхгофа

Два правила Кирхгофа представляют собой довольно сложный алгоритм решения задач на нахождение любых характеристик цепи постоянного тока. Причем сложность использования правил Кирхгофа заключена обычно не в составлении и записи уравнений, а в решении системы большого числа этих уравнений. Число уравнений зависит от сложности заданной цепи, и обычно оно равно или более трех.

Напомним эти правила, запишем в развернутом виде алгоритм решения задач с помощью этих правил и рассмотрим пример решения задачи на определение эквивалентного сопротивления некоторой цепи резисторов.

I правило Кирхгофа. ***Алгебраическая сумма величин токов в любой точке разветвления проводников (в узле) равна нулю.***

Токи, втекающие в узел **А** цепи (рис. 98 а), можно считать положительными, а вытекающие из узла – отрицательными. Тогда для некоторого узла цепи, изображенного на рисунке 98 а, можно записать

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0.$$

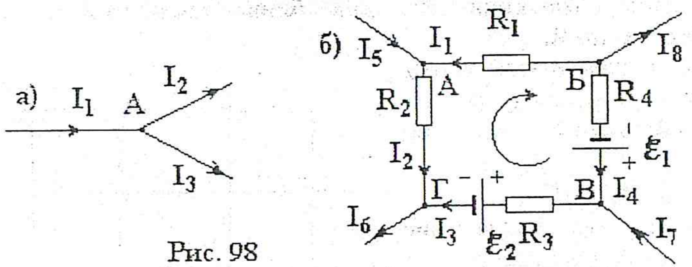


Рис. 98

II правило Кирхгофа. Выделим в произвольной цепи замкнутый контур (рис. 98 б) и сформулируем II правило Кирхгофа.

Для замкнутого контура сумма произведений сил токов в отдельных участках этого контура на соответствующее сопротивление, равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре.

Для контура некоторой цепи, который изображен на рисунке 98 б, можно записать уравнение согласно II правила Кирхгофа:

$$-I_1R_1 + I_4R_4 + I_3R_3 - I_2R_2 = E_1 - E_2$$

Это правило является следствием закона Ома для любого участка цепи (уравнение 1).

С помощью правил Кирхгофа составляется система линейных алгебраических уравнений, число которых равно числу неизвестных физических параметров в задаче с разветвленной электрической цепью.

Для правильного использования правил Кирхгофа при решении задач необходимо следовать развернутому алгоритму, который состоит из следующих пунктов:

1. Выбрать направление токов во всех участках разветвленной цепи, отметив их на чертеже;
2. При составлении уравнений по первому правилу Кирхгофа необходимо соблюдать правило знаков: токи, втекающие в узел – положительные, вытекающие из узла – отрицательные;
3. Число необходимых уравнений, составляемых по первому правилу Кирхгофа, всегда на единицу меньше числа узлов в цепи;
4. Произвольно выбрать контур и направление его обхода. Каждый новый контур должен содержать хотя бы одну новую ветвь цепи;
5. При обходе контура и составлении уравнения необходимо соблюдать правило знаков – ток с направлением, противоположным направлению обхода, берется со знаком «минус»;
6. При записи алгебраической суммы ЭДС необходимо следовать мнемоническому правилу последнего знака – при переходе через источник «ЭДС берется с последним знаком»;
7. Проверить полноту системы полученных уравнений и решить систему этих уравнений;
8. Если значение некоторых токов в цепи получилось отрицательным, то это означает, что ток течет в направлении, противоположном обозначенному на схеме. Если же получено отрицательное значение сопротивления, то ответ ошибочный.

В качестве примера использования правил Кирхгофа приведем следующую известную задачу.

ЗАДАЧА 114. Определить сопротивление цепи АБ, схема которой изображена на рисунке 99, если $R_1 = R_5 = 1$ Ом, $R_2 = R_6 = 2$ Ом, $R_3 = R_7 = 3$ Ом, $R_4 = R_8 = 4$ Ом.

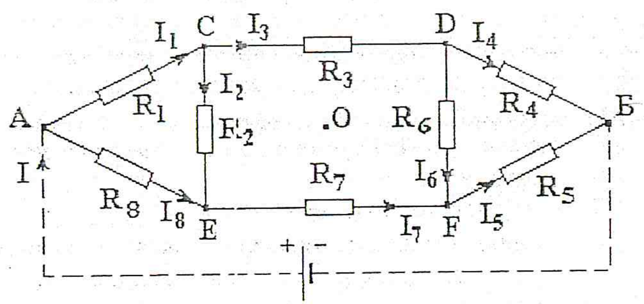


Рис. 99

РЕШЕНИЕ. В данной цепи, состоящей из 8-ми резисторов, нет хотя бы двух элементов, соединенных между собой последовательно или параллельно. Кроме того, здесь в отличие от схем, рассмотренных ранее, отсутствует осевая симметрия (она имела бы место, если сопротивления всех резисторов были бы одинаковы).

Применим к расчету эквивалентного сопротивления цепи (рис. 99) правила Кирхгофа. Для этого предположим, что к зажимам цепи **АБ** подключен источник постоянного тока с электродвижущей силой, равной **Е**, как показано пунктиром на рисунке 99. Тогда в цепи будут существовать токи. Обозначим токи на всех участках цепи и ***произвольно*** укажем их направление.

В рассматриваемом случае имеется 9 неизвестных сил токов: I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8, I. Чтобы избежать громоздких вычислений, связанных с решением системы из девяти уравнений, которые получаются согласно I и II правилам Кирхгофа, воспользуемся следующим обстоятельством, которое приводит к эвристическому упрощению решения задачи: из условия задачи видно, что данная цепь обладает центральной симметрией с центром в точке **О**. Действительно, если, отсоединив цепь в точках **А** и **Б** от источника, повернуть ее в плоскости чертежа вокруг точки **О** на 180^0 и снова соединить с источником, то в силу данных в условии равенств она совместится со своим первоначальным положением.

Но теперь в резисторе R_5 течет ток, который был раньше в резисторе R_1. Перемена же знаков напряжения на зажимах не может вызвать изменения величины силы тока ни на одном участке цепи. Это означает, что и раньше в резисторах R_5 и R_1 текли токи одинаковой силы, т.е. $I_1 = I_5$.

Аналогично можно показать, что в данной цепи должны выполняться равенства:

$$I_2 = I_6,$$
$$I_3 = I_7,$$
$$I_4 = I_8.$$

Таким образом, в задаче фактически имеется лишь пять различных неизвестных токов: I_1, I_2, I_3, I_4, I. Тогда по первому правилу Кирхгофа с учетом того, что

$$I_2 = I_6,$$
$$I_4 = I_8$$

получим соответственно для узлов A, **C** и **D** три уравнения:

$$I = I_1 + I_4,$$
$$I_1 = I_2 + I_3,$$
$$I_3 = I_2 + I_4.$$

Проверкой легко убедиться, что аналогичные уравнения, составленные для остальных трех узлов схемы, будут повторением уже имеющихся уравнений, что является следствием осевой симметрии величин сопротивлений схемы (вернее следствием конкретно заданных значений сопротивлений). Недостающие два уравнения можно получить на основании второго правила Кирхгофа.

Выбрав направление обхода контуров по часовой стрелке, запишем, например, для контуров ACDБЕА и АСЕА уравнения:

$$\mathbf{I_1R_1 + I_3R_3 + I_4R_4 = E}$$
$$\mathbf{I_1R_1 + I_2R_2 - I_8R_8 = 0.}$$

Подставив в эти уравнения численные значения сопротивлений из условия задачи, с учетом того, что

$$\mathbf{I_8R_8 = I_4R_4,}$$

решим систему из пяти уравнений относительно тока **I** и получим:

$$\mathbf{I = (14/47)\ E.}$$

Но, так как **I = E/R**, то отсюда можно найти значение искомого эквивалентного сопротивления **R = 47/14 Ом.**

Ответ: **R = 47/14 Ом.**

Несколько позже эта задача будет решена другим способом.

Как было отмечено выше, любая сложная цепь резисторов может быть рассчитана с помощью двух правил Кирхгофа. Помимо положительных сторон данного метода необходимо отметить и ряд неудобств, связанных с его использованием, и громоздкость вычислений – основное из них.

В решении приведенной задачи расчет был искусственно упрощен (упрощение имеет эвристический характер) за счет симметричности данных и осевой симметрии схемы относительно оси, проходящей через точку О. Кроме того, в решении задачи не приведен полный расчет системы полученных уравнений, а дан лишь конечный результат. Если бы в условии задачи все резисторы имели бы разные величины, то пришлось бы решать систему из девяти уравнений с девятью неизвестными, что само по себе весьма неудобно и заняло бы много времени.

Таким образом, этот недостаток во многих случаях омрачает универсальность метода решения задач с помощью правил Кирхгофа.

Решим данную задачу, пользуясь одним из искусственных эвристических приемов, в которых цепи (или некоторые участки цепи) не имеют ни параллельного, ни последовательного соединения резисторов. Этот эвристический прием позволяет преобразовать узел типа трехлучевой **«звезды»** резисторов в **«треугольник»** резисторов, и обратно.

7.3. Преобразование и расчет цепей с помощью перехода «звезда» – «треугольник»

Рассматриваемый эвристический прием связан с преобразованием, с трансформацией цепи и основан на том, что если дана сложная схема, имеющая три вывода (узла), то ее можно заменить другой, с тем же числом выводов (узлов).

Замену следует произвести так, чтобы сопротивления между двумя любыми выводами "новой" схемы были такими же, как у "старой". В результате получится цепь, сопротивление которой эквивалентно данной по условию. Общие сопротивления "старой" и "новой" цепи будут одинаковы. Но в результате такого преобразования изменяются токи внутри цепи (на тех участках, которые подверглись этому преобразованию), и поэтому такую замену можно проводить только в тех случаях, когда нет необходимости нахождения распределения токов в цепи.

Подобные преобразования широко известны для случая двух выводов. Так, например, два резистора с сопротивлениями R_1 и R_2, включенных последовательно, можно заменить одним резистором, сопротивление которого равно сумме

$$R_1 + R_2.$$

Если резисторы включены параллельно, то их можно заменить одним резистором, сопротивление которого равно

$$R_1 R_2/(R_1 + R_2).$$

В последнем случае распределение токов в цепи (или в части цепи) претерпевает изменения.

Рассмотрим более сложную трансформацию - эвристическое преобразование участков схем, имеющих по три вершины (трехполюсники). Эту трансформацию называют преобразованием "звезды" (рис. 100 а) в "треугольник" (рис. 100 б), и наоборот.

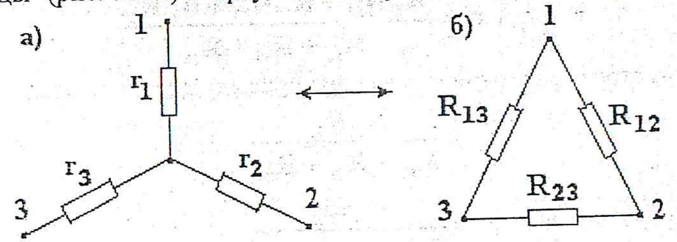


Рис. 100

Для удобства в "треугольнике" индексы резисторов определим соответственно точкам, между которыми они включены, например, R_{13} – резистор подключен к точкам 1 и 3 схемы. Сопротивления резисторов в схеме "звезда" обозначаются с индексом точки, с которой соединен этот резистор – r_1.

Как отмечено выше, для того, чтобы заменить одну из этих схем другой, нужно получить такие соотношения между их сопротивлениями, чтобы эквивалентные сопротивления между любыми точками были одинаковы для обеих схем (при условии сохранения числа этих точек).

Так, в схеме "звезда" сопротивление между точками 1 и 2 равно r_1+r_2, в схеме "треугольник" оно равно

$$\frac{R_{12}(R_{13} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}.$$

Следовательно, для того,чтобы сопротивления между точками 1 и 2 были одинаковы для обеих схем, необходимо, чтобы выполнялось следующее равенство:

$$r_1 + r_2 = \frac{R_{12}(R_{13} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}.$$

Аналогично для точек 2 и 3, и для точек 1 и 3

$$r_2 + r_3 = \frac{R_{23}(R_{12} + R_{13})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}},$$

$$r_1 + r_3 = \frac{R_{13}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}.$$

Сложим все эти уравнения и, поделив обе части на 2, получим:

$$r_1 + r_2 + r_3 = \frac{R_{12}R_{13} + R_{12}R_{23} + R_{13}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

Вычитая из этого уравнения поочередно предыдущие, получим:

$$r_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \qquad (3.1)$$

$$r_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \qquad (3.2)$$

$$r_3 = \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}. \qquad (3.3)$$

Эти выражения легко запомнить: знаменатель в каждой формуле есть сумма сопротивлений всех резисторов "треугольника", а в числителе дважды повторяется индекс, стоящий слева:

$$r_1 \to R_{12}R_{13},\quad r_2 \to R_{12}R_{23},\quad r_3 \to R_{13}R_{23}.$$

Аналогично получаются и ***формулы обратного преобразования***:

$$R_{12} = \frac{r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3}{r_3} \qquad (3.4)$$

$$R_{13} = \frac{r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3}{r_2} \qquad (3.5)$$

$$R_{23} = \frac{r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3}{r_3} \qquad (3.6)$$

Выражения 3.4 – 3.6 также легко запомнить и проверить: числитель у всех уравнений один и тот же, а в знаменателе стоит сопротивление резистора с индексом, которого не достает в левой части выражения.

Этот эвристический прием представляет собой наиболее универсальный подход к решению практически всех типов задач на разветвленные цепи.

Решим следующую задачу (см. условие задачи 114):

ЗАДАЧА 115. Определить сопротивление цепи АБ, схема которой изображена на рисунке 101 а, если $R_1 = R_5 = 1$ Ом, $R_2 = R_6 = 2$ Ом, $R_3 = R_7 = 3$ Ом, $R_4 = R_8 = 4$ Ом.

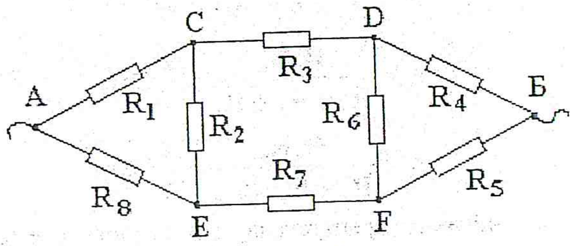


Рис. 101 а

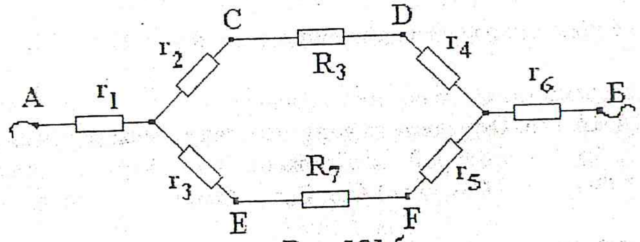


Рис. 101 б

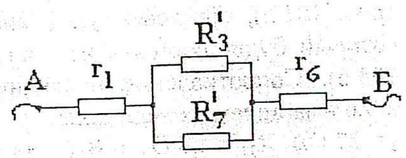


Рис. 102

РЕШЕНИЕ. Преобразуем "треугольники" $R_1R_2R_8$ и $R_4R_5R_6$ в эквивалентные "звезды". Схема примет иной вид (рис. 101 б).

Значения сопротивлений резисторов $r_1, r_2, \ldots, r_6$ найдем из формул, приведенных выше:

$$r_1 = \frac{R_1R_8}{R_1 + R_2 + R_8} = \frac{4}{7}\text{Ом};$$

$$r_2 = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_8} = \frac{2}{7}\text{Ом};$$

$$r_3 = \frac{R_2R_8}{R_1 + R_2 + R_8} = \frac{8}{7}\text{Ом};$$

$$r_4 = \frac{R_4R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{8}{7}\text{Ом};$$

$$r_5 = \frac{R_5R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{2}{7}\text{Ом};$$

$$r_6 = \frac{R_4R_5}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{4}{7}\text{Ом}.$$

Теперь нет никаких препятствий для расчета схемы, которая имеет ряд последовательно и параллельно соединенных резисторов (рис. 102).

После простых расчетов получим ответ $R_{АБ} = 47/14$ **Ом.**

Решим этим методом еще одну задачу.

ЗАДАЧА 116. Определить сопротивление между точками 2 и 3 цепи, схема которой изображена на рисунке 103.а, если $r_1 = 3$ Ом, $r_2 = 6$ Ом, $r_3 = 1$ Ом, $R_4 = 2$ Ом, $R_5 = 5$ Ом, $R_6 = 4$ Ом.

РЕШЕНИЕ. Проведем преобразование, т.е. трансформацию схемы: заменим "звезду" (рис. 103 а), образованную резисторами r_1, r_2, r_3, "треугольником", который будет состоять из новых резисторов R_{12}, R_{13} и R_{23} (рис. 103 б). Сопротивления последних рассчитаем по формулам 3.4, 3.5 и 3.6 и запишем их величины:

$$R_{12} = 27 \text{ Ом}, R_{13} = 4{,}5 \text{ Ом и } R_{23} = 9 \text{ Ом}.$$

Из рисунка 103 б видно, что вся цепь представляет собой систему параллельно и последовательно соединенных резисторов, эквивалентное сопротивление которой можно найти, последовательно упрощая схему (рис. 103 в, рис. 103 г).

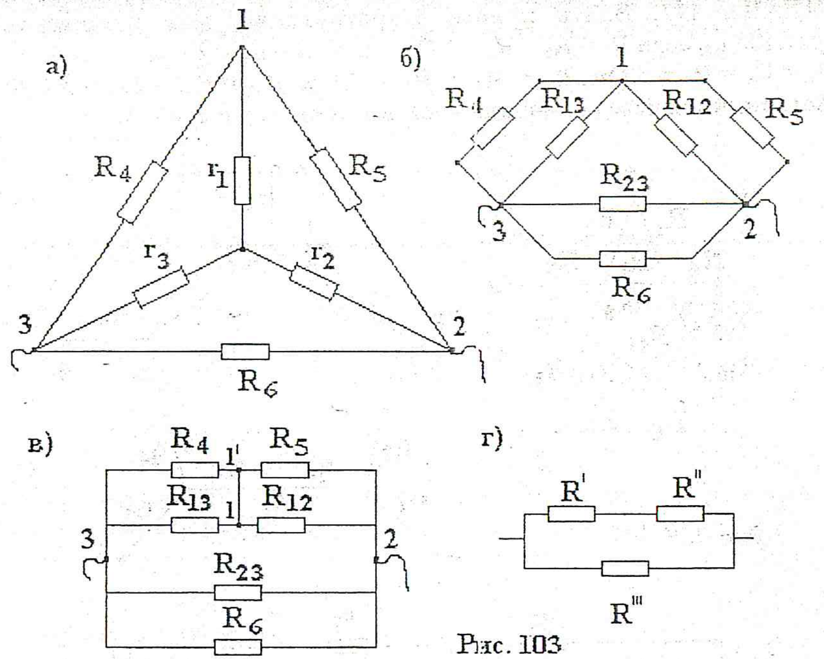


Рис. 103

После расчетов получим: **R' = 18/13 Ом, R'' = 135/32 Ом, R''' = 36/13 Ом.** Возможность окончательного расчета сопротивления предоставляется читателю.

Рассматриваемая задача может быть решена и несколько иначе. Из рисунка 103 а видно, что эту схему можно преобразовать, заменяя внешний треугольник звездой. При этом необходимо использовать формулы обратного преобразования, приведенные ранее (выражения 3.4, 3.5, 3.6). Но все это еще больше усложнит схему и соответствующие расчеты (рис. 104 б).

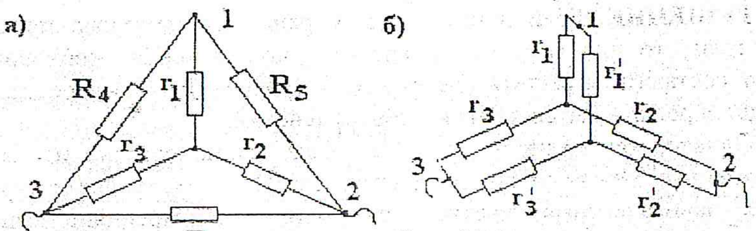


Рис. 104

ЗАДАЧА 117. Найти полное сопротивление цепи резисторов (рис.105 а), если $R_1 = R_2 = R_3 = 1$ Ом, $R_4 = R_5 = R_6 = 2$ Ом, $R_7 = R_8 = R_9 = 3$ Ом, $R_{10} = R_{11} = R_{12} = 4$ Ом, $R_{13} = R_{14} = R_{15} = 5$ Ом. **Источник поочередно подключается к точкам 0 и 2, 0 и 3.**

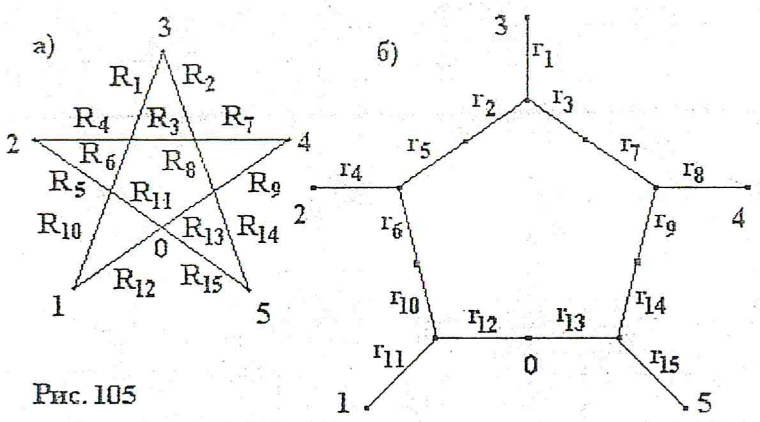


Рис. 105

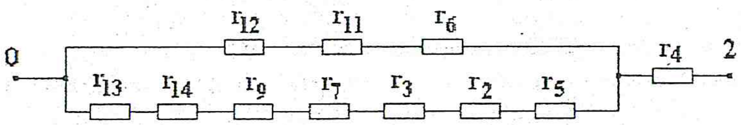


Рис. 106

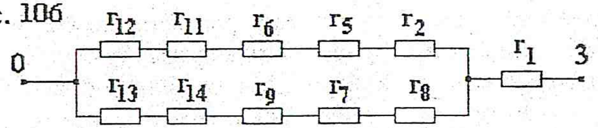


Рис. 107

РЕШЕНИЕ. Если данную задачу решать с помощью правил Кирхгофа, то для каждого конкретного подключения необходимо будет составить и решить систему из 7 уравнений. Таким образом, придется решать две системы из семи уравнений.

Однако, как видно из рисунка 105 а, схема состоит из пяти соединенных между собой "треугольников". Поэтому, трансформируя их в эквивалентные "звезды" способом, рассмотренным выше, получим новую схему (105 б).

В результате расчетов получим 15 сопротивлений, необходимых для преобразования:

$$r_1 = r_2 = r_3 = \frac{1}{3}\text{Ом}.$$

Аналогично рассчитываются остальные сопротивления:

$$r_4 = r_5 = r_6 = \frac{2}{3}\text{Ом}, \qquad r_7 = r_8 = r_9 = 1\text{Ом},$$

$$r_{10} = r_{11} = r_{12} = \frac{4}{3}\text{Ом}, \qquad r_{13} = r_{14} = r_{15} = 2\text{Ом}.$$

В случае присоединения источника к точкам 0 и 2 схема (эквивалентная) будет иметь вид, изображенный на рисунке 106 и

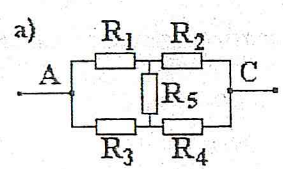
$$R_{02} = 2\frac{86}{93}\text{Ом}.$$

В случае присоединения источника к точкам 0 и 3 схема (эквивалентная) будет иметь вид, изображенный на рисунке 107 и

$$R_{03} = 2{,}5\text{Ом}.$$

Так же легко можно найти сопротивления данной цепи между точками 0 и 1, 0 и 4, 0 и 5.

ЗАДАЧА 118. В схеме неуравновешенного моста (рис. 108 а) определить общее сопротивление цепи между точками А и С, если $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 1{,}6$ Ом, $R_3 = 2$ Ом, $R_4 = 1{,}2$ Ом, $R_5 = 2$ Ом.



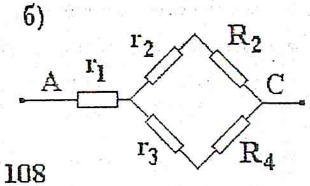


Рис. 108

РЕШЕНИЕ. Преобразуем "треугольник" из резисторов R_1 R_3, R_5 в эквивалентную "звезду" (рис. 108 б), и затем найдем сопротивления **$r_1 = 0{,}4$ Ом, $r_2 = 0{,}4$ Ом, $r_3 = 0{,}8$ Ом.**

Отсюда легко найти искомое сопротивление: **$R_{AC} = 1{,}5$ Ом.**

Следовательно, можно сделать вывод, что данный эвристический прием преобразования (трансформации) схем значительно облегчает расчет, является универсальным и может быть использован для расчета любой цепи резисторов.